Analisi II

L'analisi matematica II si basa su concetti già trattati nei corsi di analisi I e Geometria & Algebra; sarà dunque utile (e necessario) richiamare alcuni concetti di detti corsi per comprendere il programma di questo corso.

L'insieme $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato completo: ciò significa che è un campo (la somma è un gruppo commutativo, il prodotto è un gruppo commutativo, vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma), che si istituisce una relazione d'ordine (tra cui figura la disuguaglianza), che in questo caso è una relazione di ordine totale: due numeri reali possono sempre essere confrontati.

Richiamiamo, come esempio, gli altri insiemi:

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ NON è un campo, poiché non esistono elementi simmetrici rispetto alla somma né l'elemento neutro rispetto alla somma: $0 \notin \mathbb{N}$.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ è un gruppo commutativo rispetto alla somma, ma non rispetto al prodotto (non esistono elementi simmetrici rispetto al prodotto); è un anello ordinato, poiché la relazione d'ordine è compatibile con somma e prodotto (da qui "ordinato"):

$$a<b \Rightarrow a+c<b+c; \quad a<b, c>0 \Rightarrow ac<bc$$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ È un campo ordinato, MA NON È COMPLETO (non vale l'assioma di completezza).

Per essere completo, in un insieme devono valere le seguenti condizioni:

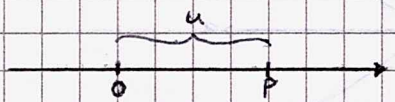
$$X \subseteq \mathbb{R},\ X \neq \emptyset;\ X \text{ limitato superiormente } \Rightarrow \exists \sup X \in \mathbb{R} = \sup X = \min\{\text{maggioranti}\}$$
[interiormente] [inf X] [inf X] [max{minoranti}]

Definiamo ora $\mathbb{R}$ esteso, indicato con $\overline{\mathbb{R}}$, che ci permette di definire estremi superiori e inferiori di X anche con X non limitato:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \text{ con } -\infty < a\ \forall a \in \mathbb{R} \text{ e } a < +\infty\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Dunque, ora vale che $X \neq \emptyset, X \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \exists \underset{[\inf]}{\sup} X \in \overline{\mathbb{R}}$.

Geometricamente, i numeri reali possono essere rappresentati su una retta ordinata, dopo aver fissato un punto di riferimento O e un'unità di misura u:



La lunghezza di OP sarà uguale a:

$$\begin{cases} |\overline{OP}| & \text{se P segue O} \\ 0 & \text{se } P \equiv O \\ -|\overline{OP}| & \text{se P precede O} \end{cases}$$

Si osserva che si possono associare dei numeri reali alla lunghezza del segmento OP, ottenendo la cosiddetta ascissa del punto P.

La relazione tra i numeri reali e l'ascissa dei generici punti P è dunque una corrispondenza biunivoca, ne segue che la dicitura "x punto di $\mathbb{R}$" è intesa in senso geometrico.

In questo corso però la trattazione non si soffermerà su $\mathbb{R}$, ma su più dimensioni: come in fisica, dove i moti sono principalmente bidimensionali, in Analisi II si studieranno gli argomenti in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ $n \in \mathbb{N}$

Nella definizione di ascissa del punto P, è stato impiegato il valore assoluto, che verrà ora definito:

$$|x| \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Rappresenta, dunque, la distanza del punto di ascissa x dall'origine.

riccardo.poliqoro.org

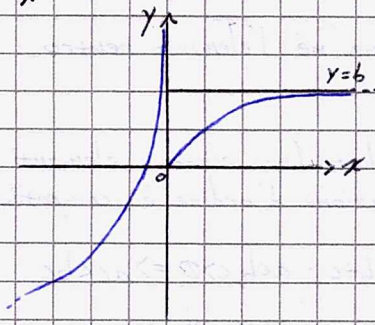
Definiremo ora brevemente le funzioni:

$$f: X \subseteq S \to T \iff f: x \in X \subseteq S \mapsto f(x) \in T, \ \forall x \in X$$

Le funzioni di tipo $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dicono funzioni reali di una variabile reale.

Definiamo ora l'estremo superiore su X di f (analoga definizione ha l'inf su X di f), unendovi un esempio:

$$\sup_X f = \sup \{ f(x), x \in X \}$$



$\sup f = +\infty$ $\quad$ $\inf f = -\infty$

$\sup_X f = b$ $\quad$ $\inf_X f = 0$

Va anche fatta una piccola precisazione sugli estremi relativi: Definito il minimo di f in X (se esiste):

$$\min_X f = \min \{ f(x), x \in X \}$$

non è detto che esista, sono valori assunti dalla f.

Si osserva che il minimo della funzione, se esiste, è univocamente determinato MA i punti di minimo non lo sono!
Basti pensare, ad esempio, alla funzione $y = \operatorname{sen} x$: il suo minimo è 1, ma i suoi punti di minimo sono $x \in \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; ciò accade analogamente per $\cos x$ e altre funzioni.

Si definisce x_0 punto di minimo per f su X se:

- $x_0 \in X$
- $f(x_0) \leq f(x) \ \forall x \in X$

Come è stato anticipato, in questo corso si opererà su più dimensioni e, dunque, su $\mathbb{R}^n$. Anticiperemo dunque alcune preliminari discussioni sulle funzioni in più variabili. Definiremo:

$f: \underbrace{\underline{x}}_{\text{n-pla}} \in X \subseteq \mathbb{R}^n \to f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$ funzione reale di n variabili reali

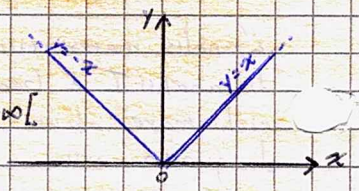
$\underline{f}: \underline{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n \to \underline{f}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^k, k > 1$ funzione vettoriale di n variabili reali

Faremo alcuni esempi.

Funzioni Elementari

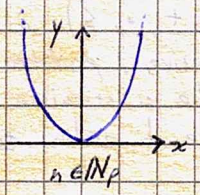
Valore Assoluto:

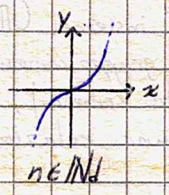
$$|f|: x \in X \to |f(x)| \in [0, +\infty[$$



Potenza n-ma

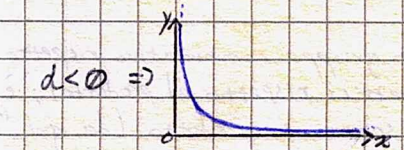
$y = x^n, n \in \mathbb{N}$

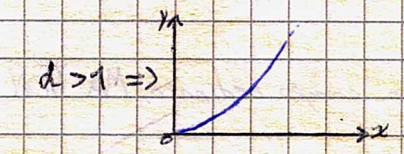


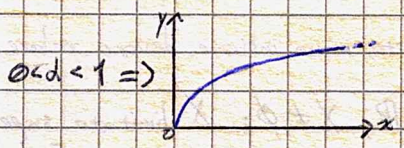


Radice n-ma

$y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$:

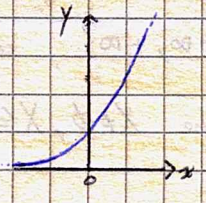


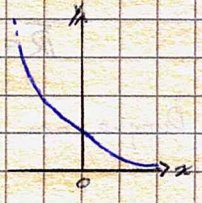




Esponenziale

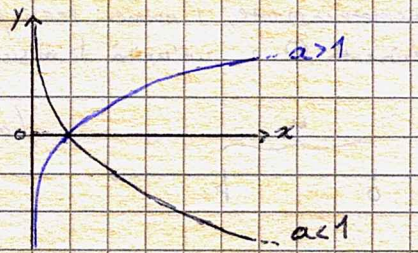
$y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$





Logaritmo

$y = \log_a x$

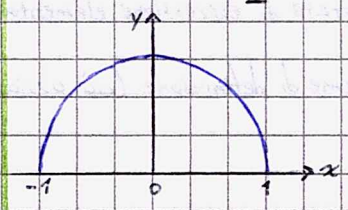


Funzioni trigonometriche: sen, cos, tg, cotg, arcsen, arccos, arctg, arccotg.

riccardo.solidoro.org

Esempi

- La funzione che associa ad ogni ~~coppia~~ punto di $\mathbb{R}^2$ la sua distanza dall'origine è una funzione reale di 2 variabili reali.
- $\underline{f}$ vettoriale: $\underline{f}: t \in [0, \pi] \to \underline{f}(t) = (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ $\quad n=1,\ k=2$ dalla def.

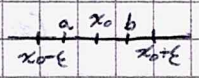


Si osserva che la funzione descrive una semicirconferenza; le funzioni vettoriali sono spesso utili per la pratica

Ricapitoleremo ora i Limiti di funzioni, partendo dalla definizione di intorno di un numero reale:

$I\ x_0$ è un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ se I contiene un intervallo aperto (a,b), $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ con $x_0 \in]a,b[$

Si dice che x_0 è **punto di accumulazione** per $X \subseteq \mathbb{R}$ se:



$$\forall I_{x_0},\ I \cap (X - \{x_0\}) \neq \emptyset$$

Definiamo dunque per intorni il limite di una funzione $f(x)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}}} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{\iff} \forall I'_l\ \exists I_{x_0} : f(x) \in I'_l\ \forall x \in I_{x_0} \cap (X - \{x_0\})$$

Il valore di f in x_0 non è rilevante poiché f potrebbe non esservi definita.

Esempio $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad (\operatorname{sgn} x = 1 \text{ se } x \geq 0,\ = -1 \text{ se } x < 0)$

$\to \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ limite destro e sinistro non coincidono

ma $f(0) = 0$

Una funzione si dice **continua in** $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ se:

- x_0 è punto di accumulazione per X
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

si studia solo nei punti di X; nei punti isolati una f è non continua per definizione.

Rimandando allo studio dei teoremi sulla continuità negli intervalli (Weierstrass, Bolzano), studiamo le derivate, che sono definite nei punti di accumulazione:
La derivata di f in $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$, con x_0 punto di accumulazione per X, se esiste, è:

$$f'(x_0) \sim \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \sim \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

⚠: f è derivabile in $x_0 \iff f'(x_0) \in \mathbb{R}$ (e non è, dunque, infinita)

Tra le funzioni elementari, quelle che possono determinare problemi per la derivabilità sono:

radice n-ma ($x_0 = 0$, $0 < \alpha < 1$), valore assoluto ($x_0 = 0$), arcoseno ($x_0 = \pm 1$, $\mathbb{C}: [-\pi/2, \pi/2]$), arcocoseno ($x_0 = \pm 1$, $\mathbb{C}: [0, \pi]$)

riccardo.polidoro.org

Le funzioni possono essere definite in due modi:

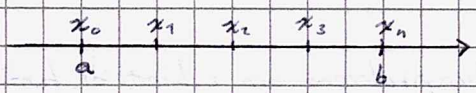
$f: x \in \mathbb{R} \to 0$ se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, 1 se $x \in \mathbb{Q}$ — definita "ad hoc"

$f(x) = \log\sqrt{\operatorname{sen}^2 x - 3}$ — ottenuta per composizione e operazioni algebriche su funzioni elementari. Tale tipologia di funzioni prende il nome di funzioni dotate di espressione elementare.

⚠: Le funzioni dotate di espressione elementare sono sempre continue nel loro insieme di definizione (ciò ovviamente non permette alcuna valutazione sulla derivabilità)

Infine, ricapitoleremo la teoria dell'integrazione, con particolare riferimento all'integrale definito:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata $\qquad \mathcal{R} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$



Essendo f limitata in $[a,b]$, essa sarà limitata per ogni $[x_{i-1}, x_i]$; definiamo dunque:

$e'_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \longrightarrow S'_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} e'_i (x_i - x_{i-1})$ somma di Riemann inferiore

$e''_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \longrightarrow S''_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} e''_i (x_i - x_{i-1})$ somma di Riemann superiore

Queste due operazioni di somma sono valide a prescindere dalla reticolazione (partizione) di $[a,b]$; è possibile dunque valutare gli insiemi composti dalle somme di Riemann al variare della reticolazione:

$$S' = \{S'_{\mathcal{R}}, \mathcal{R}\} \qquad S'' = \{S''_{\mathcal{R}}, \mathcal{R}\}$$

Si dimostra che tali insiemi sono **separati**, ovvero ogni elemento di S' è minore o uguale ad ogni elemento di S''. Essendo separati, $\sup S' \leq \inf S''$ e certamente sono finiti.

Se gli insiemi S' e S'' sono **contigui**, ovvero se $\sup S' = \inf S''$, f si dice integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.

⚠ Condizione sufficiente affinché una funzione sia integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ è che essa sia **continua** in $[a,b]$:

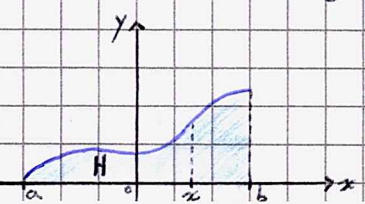
Sia f continua in $[a,b]$, allora: $e'_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f \qquad e''_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f$

In generale, per definizione, se i due insiemi S' e S'' sono contigui, allora:

$$\sup S' = \int_{[a,b]} f(x)\,dx = \inf S''$$

viene anche usata la notazione $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se la funzione è non negativa:

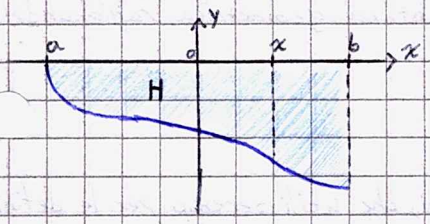


Si definisce **rettangoloide** l'insieme $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

Esso è misurabile, e la sua area è pari a $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$

riccardo.polidoro.org

Se, invece, la funzione è non positiva:



$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ f(x)\le y\le 0\}$$

$$\text{Area}(H) = -\int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

Se la funzione cambia segno, si parlerà di parte positiva e parte negativa della funzione.
Il principio di costruzione applicato sarà utile per comprendere l'integrazione delle funzioni in più variabili.

Richiamiamo ora il **teorema fondamentale del calcolo integrale**:

Sia f continua in $[a,b]$ e F una primitiva di f in $[a,b]$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$$

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$$

Sebbene poco trattate, è utile richiamare anche le successioni, particolari funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ nelle quali valgono tutte le proprietà valide per le funzioni.

Notazione: $(x_n)_n$ successione $\quad \{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ insieme degli elementi (codominio)

Si può definire il limite nell'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$: $+\infty$.

$$\lim_n x_n = \ell\in\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{\iff} \forall I_\ell\ \exists \nu\in\mathbb{N} : x_n\in I_\ell\ \forall n\ge\nu$$

Definiamo anche le serie, successioni ottenute dalle somme degli elementi di una successione:

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1\\ S_2 &= x_2+x_1\\ &\dots\\ S_n &= x_1+x_2+\dots+x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

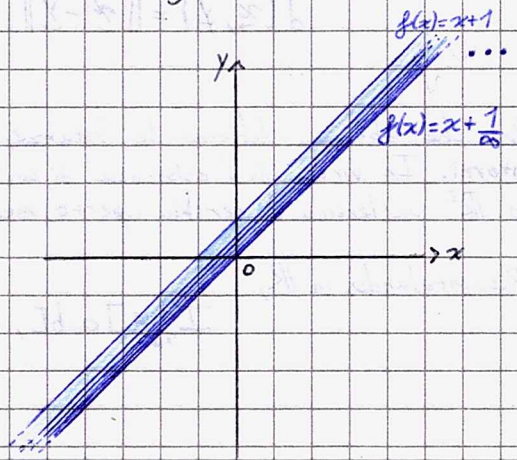
→ Somme parziali; considerando la somma parziale n-ma $\forall n\in\mathbb{N}$, si costruisce la successione delle somme parziali $(S_n)_n$, detta **serie** di termine generale x_n, denotata con:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \quad \text{o} \quad x_1+x_2+\dots+x_n+\dots$$

Il limite della serie (successione delle somme parziali) ne definisce il carattere (se esiste):

- Se $\exists \lim_n S_n = s\in\mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ si dice **convergente** e s si dice **somma della serie**: $s=\sum_n x_n$
- Se $\exists \lim_n S_n = s\in\{-\infty,+\infty\}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ si dice **divergente** (positivamente o negativamente)
- Se $\nexists \lim_n S_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ si dice **non regolare**.

In questo corso, studieremo le successioni di funzioni e il loro sviluppo in serie.



Esempio: $f_n(x)=x+\frac{1}{n}$ successione di funzioni: $(f_n)_n$:

riccardo.polidoro.org

Consideriamo lo spazio numerico $\mathbb{R}^n$: poiché lavoreremo spesso con $n>1$, e con $n>3$ non ha più senso attuare una corrispondenza biunivoca tra lo spazio e determinati insiemi di natura geometrica, ragionando in tale spazio potremo considerare delle definizioni universalmente valide.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\}$$

Fondamentale per i nostri studi è la definizione di **distanza** tra due punti, che utilizzeremo per le definizioni di limiti, intorni...
D'ora in poi, per denotare le n-ple di numeri reali, utilizzeremo la seguente notazione:

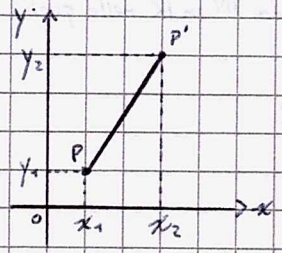
$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad ; \quad \underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

Per aiutarci nel ragionamento e nel passaggio di dimensioni, utilizzeremo prima le dimensioni con le quali si può costruire un riferimento geometrico.

- $n=1$ ovvero $\mathbb{R}$: si instaura una corrispondenza biunivoca coi punti della retta orientata: $x \overset{\text{corr. biunivoca}}{\longleftrightarrow} P$

$$d_1(P_2, P_1) = |x_2 - x_1|$$

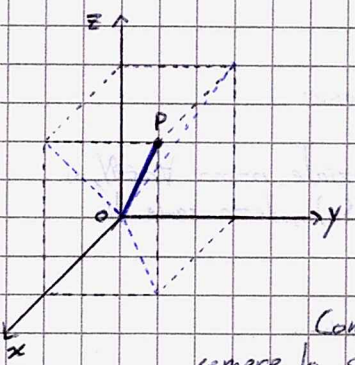
- $n=2$, ovvero $\mathbb{R}^2$: si instaura una corrispondenza biunivoca coi punti del piano euclideo Π: $P \leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$



$$d_2(P, P') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

↳ coppia ORDINATA di numeri reali $\Rightarrow (x,y) \neq (y,x)$

- $n=3$, ovvero $\mathbb{R}^3$: si instaura una corrispondenza biunivoca coi punti dello spazio euclideo Σ: $P \leftrightarrow (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$



Osservazione: La definizione della terna di assi cartesiani è convenzionale MA fondamentale: questa convenzione, utilizzata nel resto del corso, non altera gli orientamenti del piano euclideo (terna levogira); si parlerà di piani xy, yz, zx (nell'ordine).

$$d_3(P, P') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

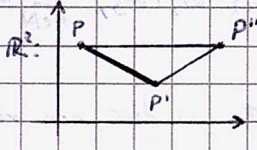
Applicazione di Pitagora "2 volte"

Come già detto, per $n \geq 4$ si perde l'interpretazione geometrica, l'insieme però assume sempre la struttura di spazio vettoriale. Per estensione, è facile dedurre il calcolo delle distanze di un qualunque spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}, \qquad d(\underline{x}, \underline{y}) \overset{\text{def}}{=} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \right)$$

Si nota che rispetta le condizioni di definizione di distanza:

$d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$; $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$
$d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$
$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{x})$ disug. triangolare



disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}^2$

Ricordando che la norma di un vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ è $\|\underline{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$, si osserva che:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$ norma del vettore differenza

Ora che abbiamo definito le distanze, possiamo parlare di **intorni**. In virtù dell'esistenza di un'interpretazione geometrica, in $\mathbb{R}^2$ parleremo di **cerchio aperto**, mentre da $\mathbb{R}^3$ in poi si parlerà di **sfera aperta** di $\mathbb{R}^n$.

Ricapitolando, in $\mathbb{R}$,

$$I_{x_0} =]a,b[,\ a,b \in \overline{\mathbb{R}} : \exists\ ]b,c[\subseteq]a,b[: x_0 \in]b,c[$$

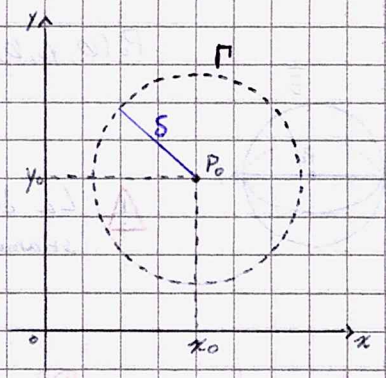
riccardo.polidoro.com

Come per le distanze, ragioniamo in dimensioni crescenti:

- In $\mathbb{R}^2$, parleremo di punti di Γ:

$P_0(x_0, y_0)$ $\quad \Gamma(P_0, \delta) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \delta^2\}$

circonferenza di centro P_0 e raggio δ



Per parlare di intorno, parleremo di cerchio aperto di centro P_0 e raggio δ:

$$B(P_0, \delta) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

→ APERTO

- In $\mathbb{R}^3$ e, dunque, in Σ, si parlerà analogamente di sfera aperta:

$$B(\underline{x_0}, \delta) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta\}$$

rappresentabile geometricamente come una vera e propria sfera

Più in generale, una sfera aperta di centro $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ e raggio δ può essere definita per estensione come:

APERTO → $B(\underline{x_0}, \delta) \overset{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x_0}\| < \delta\}$

dalla def. di distanza come norma del vettore differenza

Logicamente, si può parlare anche di cerchi chiusi e sfere chiuse: basta includerne gli estremi ("$\leq$")!

CHIUSO ← $\overline{B}(x_0, \delta) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x_0}\| \leq \delta\}$

Intorni in $\mathbb{R}^n$

Un intorno di un punto $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ è un qualsiasi sottoinsieme I di $\mathbb{R}^n$ che **contiene una sfera aperta di centro $\underline{x_0}$**.

⚠ Differenza sostanziale nel passaggio da una a più dimensioni è la perdita della possibilità di definire una relazione d'ordine totale compatibile con le operazioni fondamentali; ad esempio, non ha senso parlare di insiemi limitati superiormente [inferiormente]. Dunque, come già anticipato, ci avvarremo del concetto di distanza e, dunque, di sfere aperte o chiuse.

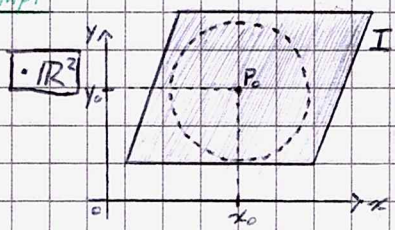
Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **limitato** se è contenuto da una sfera chiusa

Oss: Non c'è relaz. d'ordine!

$\mathbb{R}^n$ è una sfera aperta di raggio infinito ⇒ non è limitato

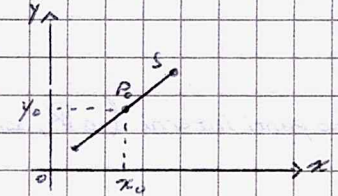
In $\mathbb{R}$,
$X \subseteq \mathbb{R}$ limitato $\iff \exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \ \forall x \in X$
(I: r. ordine)

Esempi



L'insieme I, costituito dai punti interni (e sui lati) del parallelogramma in figura, è un intorno di $\underline{P_0}(x_0, y_0)$.

⚠ Se P_0 fosse stato su un lato/vertice del parallelogramma, I non sarebbe stato un intorno

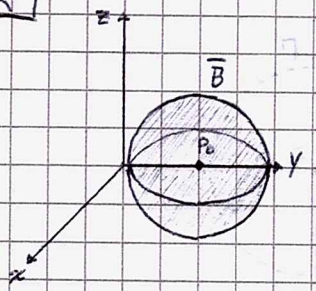


S NON È un intorno di $\underline{P_0}$: siamo in $\mathbb{R}^2$, nessun cerchio aperto di centro $\underline{P_0}$ è contenuto in S.
In $\mathbb{R}$, S sarebbe stato un intorno di x_0 (unidimensionale).

⚠ La definizione di intorno dipende dalla dimensione dello spazio in cui stiamo lavorando

riccardo.polidoro.org

$\mathbb{R}^3$



$P_0(\emptyset, y_0, \emptyset)$ $\quad$ $\bar{B}$ è un intorno di P_0

Il piano π di equazione $x=\emptyset$ NON È un intorno di P_0

⚠ La definizione di intorno dipende dalla dimensione dello spazio in cui stiamo lavorando!

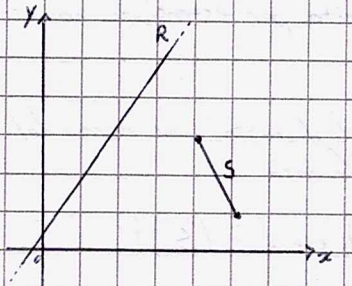
Punti di Accumulazione in $\mathbb{R}^n$

Un punto $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ si dice di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se ed ogni intorno di $\underline{x_0}$ appartiene almeno un punto di X diverso da $\underline{x_0}$:

$$\forall I_{\underline{x_0}} \; \exists \underline{x} \in I_{\underline{x_0}} : I_{\underline{x_0}} \cap (X - \{\underline{x_0}\}) \neq \emptyset$$

Esempi

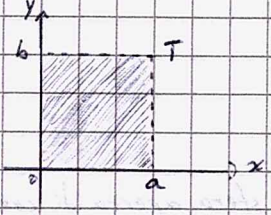
$\mathbb{R}^2$



Cerchiamo i punti di accumulazione per R, S, T.

Sfruttiamo il Teorema di Bolzano-Weierstrass:

Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è infinito e limitato, allora è dotato di almeno un punto di accumulazione.
Viceversa, se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è finito (ovvero con un numero finito di elementi $\Rightarrow$ "discreto"), non ha punti di accumulazione $\Rightarrow$ se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ha punti di acc, certamente non è finito.



I punti di accumulazione di R sono tutti e soli i punti di R stessa, inclusi i suoi estremi. Essendo non limitata, tali estremi sono gli infiniti.

I punti di accumulazione di S, come per R, sono tutti e soli i punti di S, compresi gli estremi. Ciò vale anche se gli estremi non appartengono ad S.

L'insieme $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \emptyset \leq x < a, \emptyset \leq y < b\}$ può essere visto come prodotto cartesiano di intervalli: $T = [\emptyset, a[\times [\emptyset, b[$.
I suoi punti di accumulazione appartengono al rettangolo chiuso $[\emptyset, a] \times [\emptyset, b]$

Chiusura di un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$:

Denotata con $\bar{X}$, è l'unione di X coi suoi punti di accumulazione.

Se $X = \bar{X}$, ovvero se X coincide con la sua chiusura, si dice che X è chiuso. Ne segue che gli insiemi finiti sono chiusi per definizione.

Dall'esempio in questa pagina, si osserva che la retta è certamente un insieme chiuso, il segmento lo è solo se contiene entrambi i suoi estremi.

Punti interni ad un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$

Un punto $\underline{x_0} \in X$ si dice interno ad X se esiste un intorno di x_0 contenuto in X

Si dice interno di X, denotato con $\mathring{X}$, l'insieme dei punti interni di X:

$$\mathring{X} = \{\underline{x} \in X : \exists I_{\underline{x}} \subseteq X\}$$

Recuperando l'esempio in questa pagina, si osserva che in $\mathbb{R}^2$ sulla retta non ci sono punti interni (in $\mathbb{R}$, sono TUTTI interni). Analogamente avviene per il segmento S: $\mathring{R} = \emptyset \quad \mathring{S} = \emptyset$

$$\mathring{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \emptyset < x < a, \emptyset < y < b\} =]\emptyset, a[\times]\emptyset, b[$$

riccardo.polidoro.org

In $\mathbb{R}^3$, considerando il piano Π di equazione $x=0$: $\mathring{\Pi}=\emptyset$

se l'insieme fosse un cubo o una sfera, il suo insieme aperto è il cubo/la sfera aperta corrispondente.

Un insieme X si dice **aperto** se coincide con $\mathring{X}$ ovvero:

$$X=\mathring{X}$$

equivalentemente, se tutti i punti di X sono interni ad X.

Esempio: Insieme aperto in $\mathbb{R}^2$: $\{(x,y)\overset{\in\mathbb{R}^2}{:} x,y>0\}$ (I quadrante); $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0\}$ (I-III quadrante)

⚠ Esistono insiemi NÉ APERTI NÉ CHIUSI (come l'insieme T alla pagina precedente)

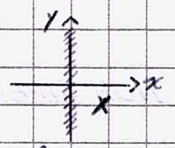
Insieme compatto

Un insieme $X\subseteq\mathbb{R}^n$ si dice **compatto** se è **chiuso e limitato.**

Esempi: • sfera chiusa in $\mathbb{R}^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$
• Un rettangolo chiuso $[a,b]\times[c,d]$ è un compatto

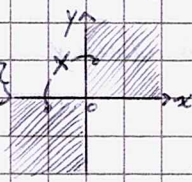
Funzioni in due variabili reali

$$f:(x,y)\in X\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow f(x,y)\in\mathbb{R}$$



Esempi: $f(x,y)=x+y$; $f(x,y)=xy$; $f(x,y)=\frac{y}{x}\to X=\mathbb{R}^2-\{(0,y): y\in\mathbb{R}\}$ insieme non limitato, non chiuso, APERTO

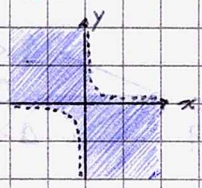
• $f(x,y)=\sqrt{xy}$ $X=\{(x,y): xy\geq 0\}$



insieme non aperto, non limitato, CHIUSO

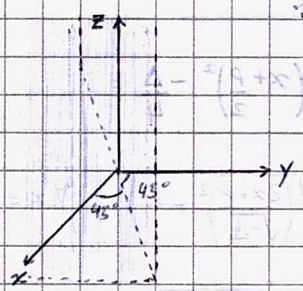
• $\log(1-x^2-y^2)$ $X: 1-x^2-y^2>0 \iff x^2+y^2<1 \Rightarrow X=B(\underline{0},1)$ (cerchio aperto; raggio; centro)

• $\log(1-xy)$ (↳ polinomio di II grado in xy) $X: 1-xy>0 \iff xy<1 \iff \begin{cases} y<1/x \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} y>1/x \\ x<0 \end{cases} \vee x=0$



• $f(x,y)=\arcsen(x+y)$ (f. lineare in 2 variabili) $\arcsen X:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow X: -1\leq x+y\leq 1 \iff -1-x\leq y\leq 1-x$

f in 3 variabili:
$f(x,y,z)=\log(x-y)\log z$ $X:\begin{cases} x-y>0 \\ z>0 \end{cases} \iff \begin{cases} y<x \\ z>0 \end{cases}$



Spazio con $z>0$, $y<x$ (delimitato dal piano $y=x$)

Diagramma di funzioni scalari in 2 variabili

In generale, nelle funzioni scalari:

$$f:\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)\in X\subseteq\mathbb{R}^n\to f(\underline{x})\in\mathbb{R}$$

↳ può non dipendere da tutte le variabili

Per rappresentare il diagramma di una funzione in **n variabili**, occorre una **(n+1)-pla** di tipo $(\underline{x}, f(\underline{x}))$
Per questo nelle f in una variabile poniamo $y=f(x)$ per il diagramma

riccardo.polidoro.org

In $\mathbb{R}^2$, il diagramma della funzione: $f:(x,y)\in X\subseteq\mathbb{R}^2 \to f(x,y)\in\mathbb{R}$

$$G_f=\{(x,y,z):(x,y)\in X \text{ e } z=f(x,y)\}$$ diagramma rispetto al piano xy

Così come le funzioni in una variabile (in cui si possono rappresentare diagrammi rispetto a entrambi gli assi, come con $f: y=x^2$ e $f: x=y^2$), si possono rappresentare i diagrammi rispetto ai piani coordinati.

Esempi di diagrammi rispetto al piano xy

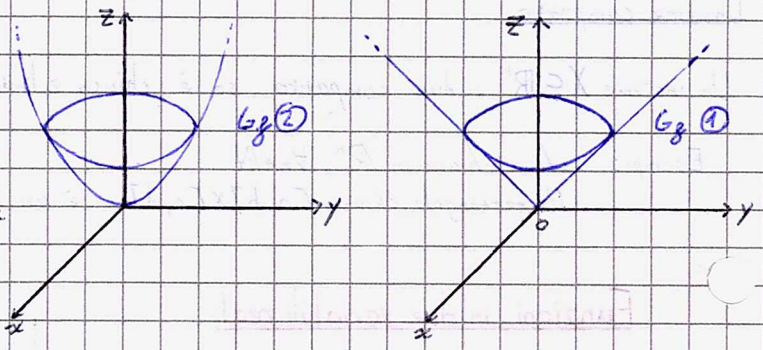
① $f(x,y)=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad G_f=\{(x,y,z):(x,y)\in X,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\}$ Ossi: se $y=0$, $z=|x|$

È un insieme rotondo: se si interseca il grafico con un piano $\pi\perp z$ si ottiene una circonferenza.

② $f(x,y)=x^2+y^2 \iff z=x^2+y^2$

Paraboloide (anch'esso rotondo)

: Se $y=x^2+z^2$ il diagramma è rispetto al piano zx



③ $f(x,y)=x^2$ NON DIPENDE da tutte le variabili

Se $y=0$, $z=x^2$.

È una superficie rigata, formata da rette parallele all'asse y

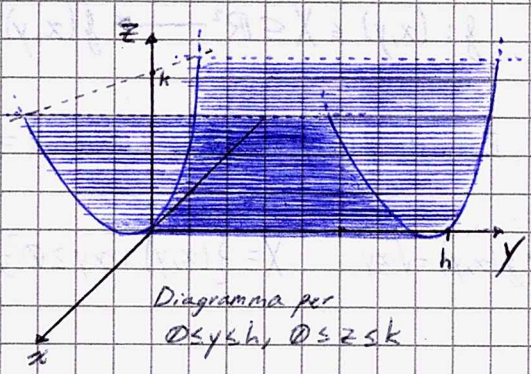


Diagramma per $0\le y\le h$, $0\le z\le k$

Calcolo di alcuni integrali indefiniti

Come già anticipato, sarà frequente nel corso lo studio di integrali, soprattutto definiti. Esprimeremo di seguito alcune tipologie particolarmente frequenti.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$$

- $\Delta<0$, $x\in\mathbb{R}$
- $\Delta=0$, $x\neq\alpha$
- $\Delta>0$, $x\in\,]-\infty,\alpha[\cup]\beta,+\infty[$

(condizioni di esistenza)

Con α,β soluzioni dell'equazione $x^2+px+q=0$

Esempio

$$\int \quad \Delta<0 \quad \boxed{x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4}}$$

- $\Delta<0$: $\sqrt{x^2+px+q}=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1}\right)$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$
- $\Delta>0$: $\sqrt{x^2+px+q}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{\Delta}}\right)^2-1}\right)$ $\quad\forall x\notin[\alpha,\beta]$
- $\Delta=0$: $\sqrt{x^2+px+q}=\sqrt{(x-\alpha)^2}=|x-\alpha|$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Valuteremo ora il comportamento di tali funzioni in un integrale secondo la forma espressa in questa pagina, e faremo alcuni esempi.

Integrali "Immediati" utili

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsen(x)+c=-\arccos(x)+c \quad \Delta\ -1\le x\le 1$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+c \quad \text{f. composta } (x\le -1\vee x\ge 1)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c \quad (x\le -1\vee x\ge 1)$$

In fatti,

$$D\left(\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ \square$$

Appunti di Calcolo - Ridoro.org

- $\Delta<0$: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1}} = \log\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} + \sqrt{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1}\right)+c$

- $\Delta>0$: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \log\left|\frac{2x+p}{\sqrt{\Delta}} + \sqrt{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{\Delta}}\right)^2-1}\right|+c$

$\frac{\Delta}{4} = \frac{p^2-4q}{4}$

Esempi

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} =$ $\Delta>0$

$X = \begin{matrix} x>1 \\ x>0 \end{matrix} = x<0 \vee x>1$ *

$\sqrt{x^2-x} = \sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{(2x-1)^2}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(2x-1)^2-1}$

$\frac{1}{4} = \frac{p^2}{4}$ agg. e sott.

$* = \underbrace{2}_{D} \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2-1}} =$

$= \log\left(2x-1+\sqrt{(2x-1)^2-1}\right)+c$

Forme di questo tipo saranno usate nel calcolo degli integrali curvilinei.

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} =$ $\Delta<0 \Rightarrow$ mettiamo in evidenza $-\frac{\Delta}{4}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}} = \log\left|\frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right|+c$

Raramente in Analisi II si può incontrare un trinomio completo, con $\Delta<0$ (oppure no):

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ calcoli lunghi e complessi

- $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$ Necessariamente $\frac{\Delta}{4}>0$ STRETTO (se $\Delta<0$, il trinomio assume il segno del coefficiente di x^2)

$\hookrightarrow \frac{p^2}{4}+q = \frac{p^2+4q}{4}$ Riconducibile a $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} =$ $\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x-x^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{-\left(\frac{2x-1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-1)^2}$

$\frac{1}{4} = \frac{p^2}{4}$

$= \int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \quad D = \arcsen(2x-1)+c$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}} = \arcsen\left(\frac{x}{2}\right)+c$

Se la radice NON è al denominatore, occorre effettuare diverse manipolazioni:

- $\int 1\sqrt{x^2+4}\,dx = \int D(x)\sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ Integrazione per parti

$= -\int \frac{x^2+4-4}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = -\int \sqrt{x^2+4}\,dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow 2\int \sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4} + 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

Int. PER PARTI: Particolarmente utile negli Integrali Definiti:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \underbrace{[f(x)g(x)]_a^b}_{\in\mathbb{R}} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Utile è anche moltiplicare la f integranda per $1 = D(x)$

riccardo.polidoro.org

Alle volte, però, l'integrazione per parti può tradursi in calcoli lunghi e complessi:

$$\int 1\sqrt{x-x^2}\,dx = x\sqrt{x-x^2} - \int \frac{x-2x^2}{2\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= -\int \frac{x-x^2-x^2}{2\sqrt{x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2-x+x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{x-x^2}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \sqrt{x}\cdot\frac{x+1-1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \sqrt{x}\left(-\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx =$$

$$= -\int \sqrt{x-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$= -2\sqrt{1-x} + c$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x-x^2}\,dx = x\sqrt{x-x^2} - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-x^2}\,dx - \int \sqrt{x-x^2}\,dx - 2\sqrt{1-x} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\int \sqrt{x-x^2}\,dx = x\sqrt{x-x^2} - 2\sqrt{1-x} + c \Rightarrow \int \sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x-x^2}}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{1-x} + c$$

Insiemi Connessi di $\mathbb{R}^n$

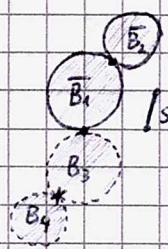
Richiamiamo la partizione di un insieme:

$X_1 \subseteq X,\ X_1 \neq \emptyset$
$X_2 \subseteq X,\ X_2 \neq \emptyset$

$\{X_1, X_2\}$ = Partizione di $X \iff X_1 \cup X_2 = X,\ X_1 \cap X_2 = \emptyset$

Ad esempio, le classi di equivalenza sono partizioni dell'insieme quoziente

Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ si dice **connesso** se qualunque sia la **partizione** $\{X_1, X_2\}$ di X esiste almeno un punto di uno dei due insiemi che è d'accumulazione per l'altro.



Esempi

- $B_1 \cup B_2$ connesso
- $B_1 \cup B_3$ connesso
- $B_1 \cup S$ non connesso
- $B_3 \cup B_4$ non connesso

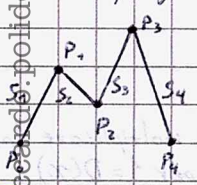
Un insieme X aperto [chiuso] è connesso $\iff$ non esiste alcuna partizione di X costituita da insiemi anch'essi aperti [chiusi]

Spostandoci sull'asse reale, si dimostra che $X \subseteq \mathbb{R}$ connesso $\iff X$ è un intervallo.

Per $n>1$, i segmenti e le rette sono degli insiemi connessi, lo stesso vale per un arco di curva.

Insiemi connessi per poligonali

Siano $P_0, \dots P_k$ k punti di $\mathbb{R}^n$; l'insieme $P = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{P_{i-1}P_i}$ si dice **poligonale di $\mathbb{R}^n$ di estremi P_0 e P_k** se i segmenti che la compongono hanno in comune a due a due al più gli estremi e sono consecutivi.



La particolarità delle poligonali in $\mathbb{R}^n$ è che, qualunque siano i vertici, essa è sempre un insieme connesso di $\mathbb{R}^n$, "come se fosse un intervallo in $\mathbb{R}^n$".

Osservazione: Un insieme è connesso $\iff$ per ogni coppia di punti dell'insieme esiste un insieme connesso che li contiene, tutto contenuto nell'insieme di partenza.

Scaricato da Sofia Poldoro (sofia.poldoro.org)

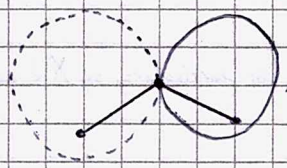
Un insieme si dice **connesso per poligonali** se $\forall p, q \in X$, $p \neq q$, $\exists$ poligonale P di estremi p e q TUTTA CONTENUTA IN X.

Questa condizione è utile per vedere geometricamente e facilmente la connessione degli insiemi. Infatti:

X connesso per poligonali $\Rightarrow X$ connesso

⚠ NON VALE IL VICEVERSA, IN GENERALE: ad esempio, un arco di curva è un insieme connesso ma non connesso per poligonali

Se X è aperto, allora X connesso per poligonali $\Leftrightarrow X$ connesso



Insieme connesso per poligonali (né aperto né chiuso)

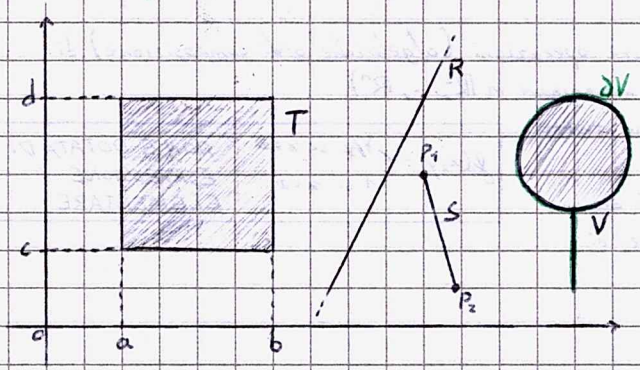
Punti di Frontiera, Frontiera di un insieme

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice **punto di frontiera** se ad ogni intorno di x_0 appartengono sia i punti di X, sia i punti del complementare $\mathbb{R}^n - X$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

La frontiera di X è l'insieme dei punti di frontiera per X, e si denota con ∂X.

$$x_0 \in \partial X \Leftrightarrow x_0 \notin \mathring{X},\ x_0 \notin (\mathbb{R}^n - X)^\circ$$

Esempi



$$\partial T = ([a,b] \times \{c\}) \cup (\{a\} \times [c,d]) \cup (\{b\} \times [c,d]) \cup ([a,b] \times \{d\})$$

⚠ Il prodotto cartesiano NON è commutativo

$$\partial R = R,\quad \partial S = S$$

Un insieme è chiuso $\Leftrightarrow X \supseteq \partial X$ ⚠ "aperto $\Leftrightarrow X \neq \partial X$" NON VALE, poiché esistono insiemi né aperti né chiusi

Regione o Dominio in $\mathbb{R}^n$

Per questo, nelle funzioni è più corretto parlare di INSIEME DI DEFINIZIONE

Sia $X \neq \emptyset$, $X \neq \mathbb{R}^n$, X è una regione di $\mathbb{R}^n$ se ogni punto della frontiera di X è di accumulazione per i punti interni ad X.

Una regione che è anche un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ si dice un **Dominio**, e si ha che $X = \overline{(\mathring{X})}$.

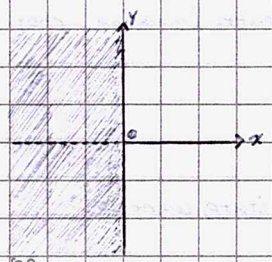
chiusura dell'interno

→ insieme chiuso "pieno", l'interno non deve essere vuoto

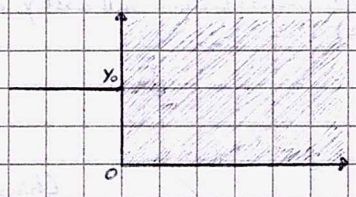
Esempi di Regioni

X aperto: SÌ

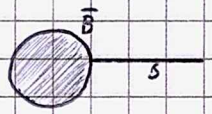
L'unione di un aperto con una parte della frontiera di X: SÌ



SÌ



$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_0 \text{ e } x \leq 0\}$ NO



BUS NO

⊙ Regione aperta: una regione può essere sia aperta che chiusa; una regione chiusa è un dominio

riccardo.polidoro.org

Insiemi Internamente Connessi

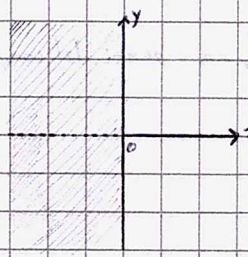
Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ si dice **internamente connesso** se $\mathring{X}$ è un insieme connesso.

⚠ · X connesso $\not\Rightarrow$ X internamente connesso — segmenti, archi di curva... (Non hanno punti interni)

· X internamente connesso $\not\Rightarrow X$ connesso — $T \subset S$ (S privo di punti interni, $(T \cup S)^\circ = \mathring{T}$ internamente connesso)

MA se X è una regione (in particolare, se X è un dominio) **di $\mathbb{R}^n$ internamente connessa, allora X è connesso.**

Esempi



Non è un dominio, è una regione

La frontiera è costituita dall'asse y

Espressioni Elementari di una Funzione

Una funzione reale di più variabili reali è una funzione ottenuta tramite operazioni (algebriche o di composizione) di funzioni elementari di una singola variabile reale (che possiamo però immaginare in $\mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$)

Come detto in precedenza, le funzioni dotate di espressione elementare sono tutte continue nel loro insieme di definizione in $\mathbb{R}$.

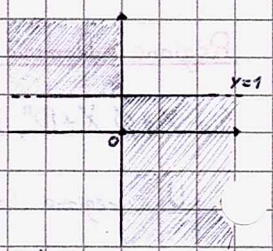
Per determinare l'insieme di definizione di una funzione in più variabili reali dunque si adoperano le tecniche già acquisite per determinare l'insieme di definizione di funzioni reali in una variabile reale.

$f(x,y) = \begin{cases} y/x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ NON È DOTATA DI ESPRESSIONE ELEMENTARE

Esempi

Determiniamo l'insieme di definizione di alcune funzioni, illustrandone le proprietà:

· $f(x,y) = \sqrt{x - xy}$ $\quad \sqrt{\cdot} : t \in [0, +\infty[\to \sqrt{t} \in [0, +\infty[$ $\quad X : x - xy \geq 0 \iff x(1-y) \geq 0$



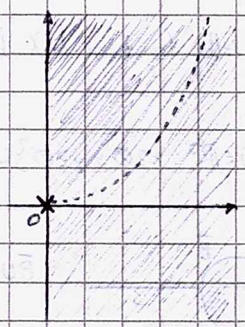
Ottenuta da: $\varphi_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \varphi_1(x,y) = x$ piano di equazione $z = x$

$\varphi_2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \varphi_2(x,y) = y$ piano di equazione $z = y$

$\Rightarrow x - xy \equiv \varphi_1(x,y) - \varphi_1(x,y)\varphi_2(x,y)$

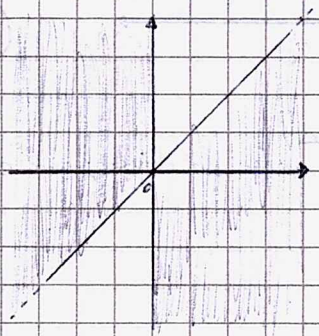
L'insieme $X = \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$ insieme chiuso, non limitato, connesso (per poligonali, è una regione)

· $e^{\frac{\sqrt{x}}{y - x^2}}$ $\quad X : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \neq x^2 \end{cases}$



non limitato, non connesso, non è né aperto né chiuso: contiene i punti di accumulazione sull'asse y, ma non tutti (mancano i punti $y = x^2$)

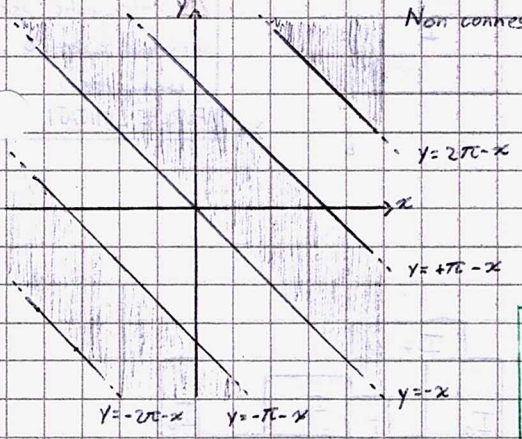
· $\sqrt{x^2 - xy}$ $\quad X : \begin{cases} x \geq 0 \\ x - y \geq 0 \\ \Downarrow \\ x \geq y \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq y \end{cases}$



Chiuso, non limitato, connesso!

riccardo.polidoro.org

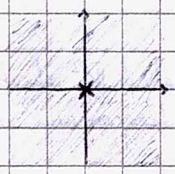
• $\log(\text{sen}(x+y))$ $\quad X: \text{sen}(x+y) > 0 \Rightarrow (x+y) \in]0, \pi[+ 2k\pi \Rightarrow 2k\pi < x+y < (2k+1)\pi \Rightarrow 2k\pi - x < y < (2k+1)\pi - x$



Non connesso, aperto, non limitato

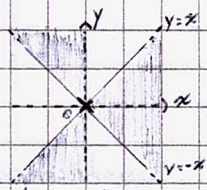
• $\log\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad X: \sqrt{x^2+y^2} > 0 \Rightarrow x^2+y^2 > 0 \Rightarrow X = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

"piano bucato"



Esercizi

$$f(x,y) = \frac{\arcsen xy}{x \arctg y} \qquad f(x,y) = \frac{\sqrt{x-|y|}}{1-e^{xy}}$$



Aperto, non connesso, non limitato, è una regione

Limite e Continuità di funzioni scalari in n variabili

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\underline{x}_0$ punto di accumulazione per X. Si dirà che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite di f per $\underline{x}$ che tende a $\underline{x}_0$ (o, alternativamente, limite di f in $\underline{x}_0$), e si scrive $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ se:

$$\forall I'_l \; \exists I_{\underline{x}_0} : f(\underline{x}) \in I'_l \; \forall \underline{x} \in I_{\underline{x}_0} \cap (X - \{\underline{x}_0\})$$

In particolare:

- $l \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists I_{\underline{x}_0} : |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon \; \forall \underline{x} \in I_{\underline{x}_0} \cap X, \; \underline{x} \neq \underline{x}_0$
- $l = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists I_{\underline{x}_0} : f(\underline{x}) > \varepsilon \; \forall \underline{x} \in I_{\underline{x}_0} \cap X, \; \underline{x} \neq \underline{x}_0$
- $l = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists I_{\underline{x}_0} : f(\underline{x}) < -\varepsilon \; \forall \underline{x} \in I_{\underline{x}_0} \cap X, \; \underline{x} \neq \underline{x}_0$

Sia $\underline{x}_0 \in X$. Si dirà che f è continua in $\underline{x}_0$ se:

$$\forall I'_{f(\underline{x}_0)} \; \exists I_{\underline{x}_0} : f(\underline{x}) \in I'_{f(\underline{x}_0)} \; \forall \underline{x} \in X \cap I_{\underline{x}_0}$$

Osservazione: Dalla definizione, se $\underline{x}_0$ è di accumulazione per X si ha che $f(\underline{x})$ è continua in $\underline{x}_0$ se:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

⚠: Se $\underline{x}_0$ è isolato per X, f è continua in $\underline{x}_0$ per definizione

La funzione f si dice continua in X se è continua in ogni punto di X.

Richiamiamo alcuni teoremi utili...

Teorema di Weierstrass:

Se f è una funzione continua in $X \subseteq \mathbb{R}^n$, con X insieme compatto di $\mathbb{R}^n$ (chiuso e limitato), allora il suo codominio $f(X)$ è anch'esso un compatto (di $\mathbb{R}$), e f è dotata in X di minimo e di massimo

Teorema di Bolzano:

Se f è una funzione continua in $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e se X è un insieme connesso, allora $f(X)$ è un connesso di $\mathbb{R}$, cioè è un intervallo e f assume tutti i valori compresi tra $\inf_X f$ e $\sup_X f$.

Teorema degli zeri:

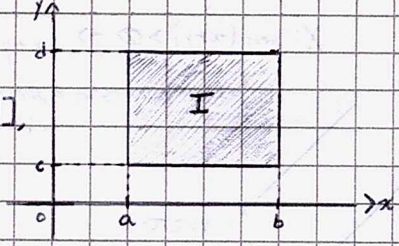
(Non usato, enunciato per completezza)

Sia f continua in $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia X un insieme connesso. Allora, se f assume valori di segno opposto in due punti di X, esiste almeno un punto di X in cui f si annulla.

riccardo.poliqoro.org

Misura in $\mathbb{R}^2$

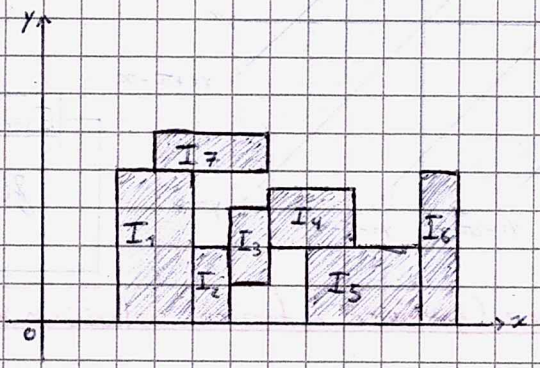
Sappiamo misurare gli intervalli (rettangoli) di $\mathbb{R}^2$: se $I=[a,b]\times[c,d]$, l'area di I sarà $\text{area}(I)=(b-a)\cdot(d-c)$



⚠ Vale anche per intervalli aperti o semiaperti PURCHÉ LIMITATI

Consideriamo un numero finito di intervalli di $\mathbb{R}^2$ che hanno al più i punti della frontiera in comune, essi determinano un **plurintervallo** P (o plurirettangolo), dato da:

$$P=\bigcup_{i=1}^{n} I_i \qquad \text{con } \mathring{I}_i\cap\mathring{J}_i=\emptyset\ \forall i\neq j$$



Essendo composto da soli insiemi misurabili, P è misurabile e risulta:

$$\text{area}(P)=\sum_{i=1}^{n}\text{area}(I_i)$$

Grazie a questa definizione, è possibile approssimare un qualunque insieme $X\subseteq\mathbb{R}^2$ **limitato** tramite plurirettangoli. Definiamo la **misura esterna di X** (μ_e) e la **misura interna di X** (μ_i):

$$\mu_e(X)=\inf\{\text{area}(P'),\ P'\supseteq X\}$$

$$\mu_i(X)=\sup\{\text{area}(P),\ P\subseteq X\}$$

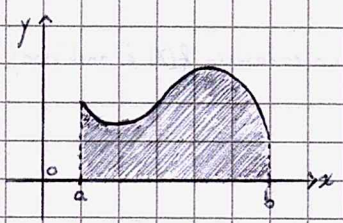
I due insiemi usati nella definizione sono separati e, dunque, si ha che $\mu_i(X)\leq\mu_e(X)$ SEMPRE.

In particolare, se i due insiemi costruiti nella definizione di misura esterna/interna sono contigui e, dunque: $\mu_i(X)=\mu_e(X)=\mu(X)$, l'insieme X si dice **misurabile secondo Peano-Jordan**, e la sua misura sarà $\text{area}(X)=\mu(X)$.

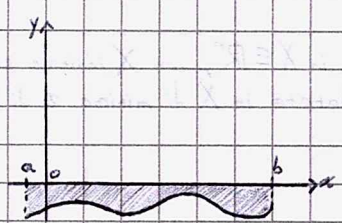
⚠ $\mu(X)$ è sempre **maggiore o uguale** a 0: un insieme misurabile privo di punti interni ha $\mu_i=0=\mu_e=\mu$.
Esempi: segmenti, archi di circonferenza, curve...

⚠ **Non tutti gli insiemi sono misurabili!** Esempio: $X=([0,1]\cap\mathbb{Q})\times([0,1]\cap\mathbb{Q})$ NON È MISURABILE; $\mu_i=0$, $\mu_e=1$ ($\mathring{X}=\emptyset$; $\partial X=[0,1]\times[0,1]$)

Esempio di insieme misurabile: Il rettangoloide H di una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ di segno costante è un insieme misurabile, e si ha:



$f\geq 0$ in $[a,b]\Rightarrow \text{area}(H)=\int_a^b f(x)\,dx$

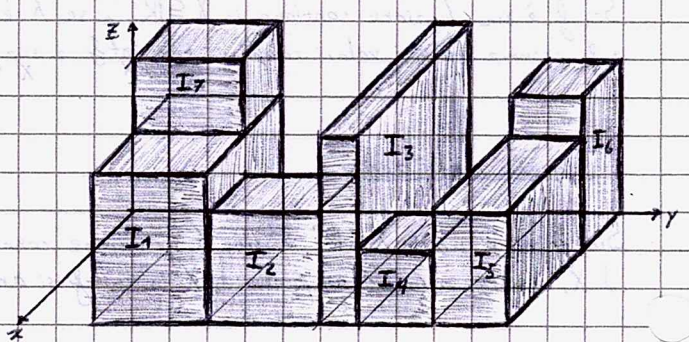


$f\leq 0$ in $[a,b]\Rightarrow \text{area}(H)=-\int_a^b f(x)\,dx$

Misura in $\mathbb{R}^3$

Si procede in maniera del tutto analoga a quanto fatto in $\mathbb{R}^2$:

- Un intervallo di $\mathbb{R}^3$ è dato da $I=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ e $\text{vol}(I)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot(b_3-a_3)$
- Un plurintervallo di $\mathbb{R}^3$ è $P=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$, con $I_i\cap I_j=\partial\emptyset\ \forall i\neq j$
  $\text{vol}(P)=\sum_{i=1}^{n}\text{vol}(I_i)$



- Se $X\subseteq\mathbb{R}^3$ è limitato, X si dice misurabile secondo Peano-Jordan se $\mu_e(X)=\inf_{P'\supseteq X}(\text{vol}(P'))=\sup_{P\subseteq X}(\text{vol}(P))=\mu_i(X)$, e la sua misura $\mu(X)=\mu_i(X)=\mu_e(X)$ si denota con $\text{vol}(X)$.

riccardo.polidoro.org

Esempio di insieme misurabile in $\mathbb{R}^3$

$C = X \times [0,h] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in X \text{ e } 0 \le z \le h\}$, dove h è un numero positivo e $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme compatto e misurabile; rappresenta un cilindro retto di base X ("forma qualsiasi") e altezza h.

$$\text{vol}(C) = \text{area}(X) \cdot h$$

Proprietà della Misura in $\mathbb{R}^n$ — valide per ogni n!

- **Monotonia**

$$X \subseteq Y \Rightarrow \mu(X) \le \mu(Y)$$

analogamente, $X \subseteq Y$ misurabili, $\partial(Y-X) = \partial Y - \partial X$

- **Additività**

$$\mathring{X} \cap \mathring{Y} = \emptyset \Rightarrow \mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$$

se si intersecano al più sulla frontiera, la loro unione è misurabile

- **Misura dell'Ins. Vuoto**

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad \text{per def.}$$

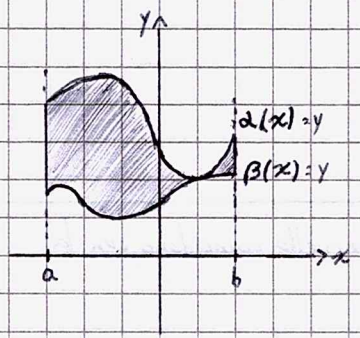
- **Legame con la frontiera**

X misurabile $\iff \partial X$ misurabile e la sua misura è $= 0$ ($\mu(\partial X)$)

Esempio: $\mu[\partial\{[0,1] \cap \mathbb{Q} \times [0,1] \cap \mathbb{Q}\}] = 1$, misura dell'insieme $[0,1] \times [0,1]$

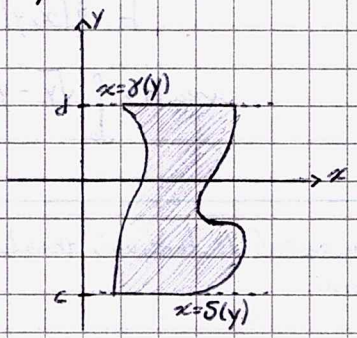
Insieme normale del piano $\mathbb{R}^2$ rispetto all'asse x [y]

Consideriamo due funzioni continue definite in uno stesso intervallo, in cui una è minore o uguale all'altra per ogni valore assunto dalle funzioni in detto intervallo.
L'insieme costituito dalle coppie ordinate di numeri reali tale che la prima [seconda] coordinata varia nell'intervallo suddetto e la seconda [prima] coordinata con valore compreso tra i valori assunti dalla funzione nel punto che stiamo considerando si dice **insieme normale rispetto all'asse x [y]**.



$\alpha(x) \ge \beta(x) \ \forall x \in [a,b]$

Insieme normale rispetto all'asse x ①



$\delta(y) \ge \gamma(y) \ \forall y \in [c,d]$

Insieme normale rispetto all'asse y ②

① $H = \{(x,y) : x \in [a,b] \text{ e } \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$

Con α, β funzioni continue in $[a,b]$ e tali che $\alpha \ge \beta$ in $[a,b]$

② $H = \{(x,y) : y \in [c,d] \text{ e } \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$

Con γ, δ funzioni continue in $[c,d]$ e tali che $\gamma \le \delta$ in $[c,d]$

Si osserva che H è misurabile e, in particolare: misurabili perché $\partial(H) = \emptyset$ (segmenti e curve hanno misura nulla) NON LUNGHEZZA

① $$\text{area}(H) = \int_a^b (\alpha(x) - \beta(x))\,dx$$

② $$\text{area}(H) = \int_c^d (\delta(y) - \gamma(y))\,dy$$

H è certamente un dominio se le funzioni α e β [γ e δ] non coincidono in un intervallo

Osservazione: Il rettangoloide è un particolare insieme normale, con una delle due funzioni identicamente nulla.

riccardo.polidoro.org

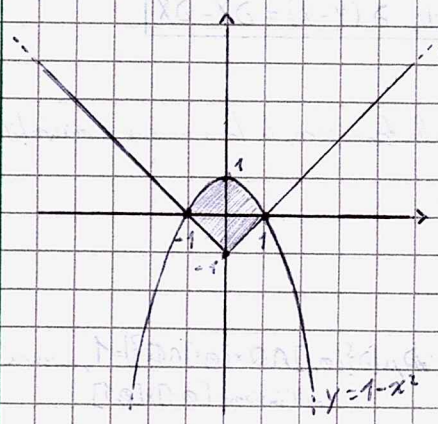
⚠ Gli insiemi normali sono la base del calcolo degli integrali doppi ⇒ saper scrivere un insieme normale bene rende semplice il calcolo dell'integrale.

~~Sinpò~~ Un'altra proprietà importante della misura in $\mathbb{R}^n$ è che essa è **invariante per traslazioni**, dunque se un insieme è misurabile, la sua misura non dipende dalla posizione ⇒ una delle due funzioni può essere anche non positiva; basta sommare il minimo della funzione e traslarla nel semipiano positivo (sommiamo il min a ENTRAMBE LE F), ma otterremmo un risultato del tipo:

$$\text{area}(H) = \int_a^b |(m+\alpha(x)) - (m+\beta(x))|\,dx = \int_a^b |\alpha(x) - \beta(x)|\,dx$$

⇒ analiticamente si osserva facilmente che **non è rilevante** che le due funzioni siano entrambe non negative [positive], purché abbiano segno costante.

Esempi



Troviamo gli estremi di integrazione intersecando i due diagrammi:

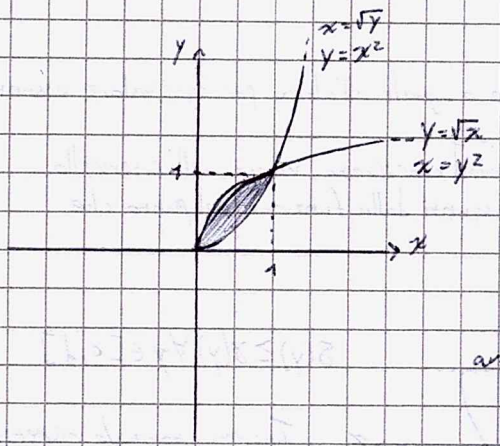
$1-x^2 = |x|-1 \Rightarrow x = \pm 1$ funzioni entrambe pari, calcoliamo un punto e l'altro sarà simmetrico:

$x+1 = 1-x^2$; $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1$

Essendo funzioni pari, il dominio in figura è simmetrico rispetto all'asse y, e dunque si può calcolare come:

$$2\int_0^1 (1-x^2)-(x-1)\,dx = 2\int_0^1 2-x-x^2\,dx = \frac{7}{3}$$

così non occorre discutere il v. ass.



Considerandolo, in maniera perfettamente duale, rispetto alla y:

$x = \sqrt{y}$, $x = y^2$; $\sqrt{y} = y^2 \Leftrightarrow y = 0, y = 1$

$$H = \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le \sqrt{y}\}$$

$$\text{area}\,H = \int_0^1 \sqrt{y} - y^2\,dy = \left[\frac{2}{3}\sqrt{y^3} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Spesso si parla di *domini normali*: le funzioni, quando non "si appiattiscono" in un intervallo, coincidono con la chiusura dei loro punti interni.

Esercizi

- $\int R(x, \sqrt{ax+b})\,dx$: (R funzione razionale, x variabile) $\sqrt{ax+b} = t \Rightarrow x = \frac{t^2-b}{a}$ (invertibile)

$$dx = \frac{2}{a}t\,dt$$

$$\int R(t)\,t\,dt$$

Esempio: $\int \frac{1-\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}\,dx$ $\quad \sqrt{x+2} = t \Rightarrow x = t^2-2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$2\int \frac{1-t}{1+t}\,t\,dt = 2\int \frac{-t^2+t}{t+1}\,dt = 2\int -t+2-\frac{2}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\left(-\frac{t^2}{2}+2t-2\log|t+1|+c\right) = t^2+4t-4\log|t+1|+c = (t=\sqrt{x+2})$$

$$= -x-2+4\sqrt{x+2}+4\log\left(\sqrt{x+2}+1\right)+c$$

($\sqrt{x+2} \ge 0$ per def., > 0 → puoi levare v. ass.)

Richiamo: Integrale per sostituzione

$\int f(x)\,dx = F(x)+c$

$f : I \to J$; $g : J \to I$ [invertibile]

$x = g(t)$; $t = g^{-1}(x)$

$g \in C^1(J)$ ⇒ funzione di classe C^1, ovvero derivabile e con derivata continua in J.

$F \circ g$ è una primitiva di $f(g(t))\cdot g'(t)$

$$\Rightarrow \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = F(g(t))+c$$

$t = g^{-1}(x)$; $x = g(t)$; g invertibile

Riccardo Polidoro .org

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \overset{\text{⚠}}{=} \int_{t_1}^{t_2} f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

⚠ Vero SOLO NELL'INTEGRALE DEFINITO

Nell'integrale definito, non occorre imporre l'invertibilità della funzione con cui si sostituisce

Esempio

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} =$$

*Nel corso di Analisi I si sostituiva con $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ come funzione razionalizzante; osservando che ci sono solo **monomi di grado pari**, sostituiamo $t=\operatorname{tg} x$*

$$t=\operatorname{tg} x \Rightarrow x=\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{1}{t^2+1}-\frac{t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(1+t) - \underbrace{\log(1-t)}_{\text{se } t=-1}\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\Big]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}}\right) = \dots$$

Consideriamo ora l'integrale di una funzione razionale della x data da un trinomio di II grado con $a>0$ e, per completezza, mostriamo il processo risolutivo per sostituzione (ma, come nel caso $a<0$, può risultare più conveniente utilizzare varie **manipolazioni** e l'**integrazione per parti**, rispettivamente a seconda che la funzione sia al denominatore o al numeratore.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad a>0$$

$t=\sqrt{ax^2+bx+c}$ NON razionalizza (relaz. quadratica)

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,(t-x) \Rightarrow t = x+\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax^2+bx+c}$$

Esempio

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = t-x \Rightarrow x^2+x+1 = t^2+x^2-2tx \Rightarrow x(2t+1) = t^2-1 \to x=\frac{t^2-1}{2t+1}$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = t-\frac{t^2-1}{2t+1} = \frac{t^2+t+1}{2t+1} \qquad dx = \frac{4t^2+2t-(2t^2-2)}{(2t+1)^2}\,dt =$$

$$= \int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{2t+1}{t^2+t+1} \cdot \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}\,dt = \quad = \frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}\,dt = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}\,dt$$

$$= \int_1^{1+\sqrt{3}} \underbrace{\frac{2}{2t+1}}_{\text{se } t=-1}\,dt = \log(2t+1)\Big]_1^{1+\sqrt{3}} = \dots$$

se operavi $\pm b^2/4$ era più rapido!

- $\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$ *molto più complessa, conviene int. per parti!*

riccardo.polidoro.org

Integrali Doppi e Tripli

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ oppure $X \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme compatto e misurabile secondo Peano-Jordan, e sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione continua (eq. limitata) in X.

Consideriamo una partizione di X: $\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_n\} : [X_i \cap X_j = \emptyset \ \forall i \neq j ; \bigcup_{i=1}^{n} X_i = X]$ con X_i limitato e misurabile $\forall i$

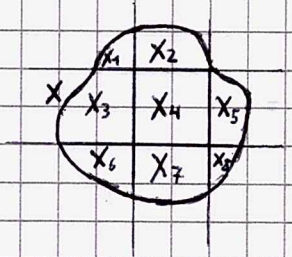
Possiamo definire le somme di Riemann:

$$s'_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{X_i} f \cdot \mu(X_i) \right)$$

$$s''_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{X_i} f \cdot \mu(X_i) \right)$$

Essendo f limitata in X, è limitata in ogni suo sottoinsieme, dunque $\inf_{X_i} f, \sup_{X_i} f \in \mathbb{R} \ \forall i$

Esempio: decomposizione di $X \subseteq \mathbb{R}^2$ mediante rette parallele agli assi:



Da cui, facendo variare la partizione $\mathcal{P}$, otteniamo:

$$S' = \{s'_{\mathcal{P}}, \mathcal{P}\} \quad , \quad S'' = \{s''_{\mathcal{P}}, \mathcal{P}\}$$

Si dimostra che sono insiemi separati: $\forall \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$; ogni partizione di X è costituita da insiemi misurabili e limitati; $s'_{\mathcal{P}_1} \leq s''_{\mathcal{P}_2}$

In particolare, se S' ed S'' sono insiemi contigui, f si dice integrabile secondo Riemann in X; l'unico elemento di separazione è, per definizione, l'integrale di Riemann di f esteso ad X:

$$\sup S' = \inf S'' = \int_X f \, d\mu$$

$d\mu$ → infinitesimo di misura in X; "esteso a X"

$n=2$: "integrale doppio": $\iint_X f(x,y) \, dx\,dy$

$n=3$: "integrale triplo": $\iiint_X f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$

Proprietà

Se f è continua in X (per Weierstrass è limitata in un compatto), è certamente integrabile secondo Riemann in X

- $f \underset{[\leq 0]}{\geq 0}$ in $X \Rightarrow \int_X f \, d\mu \underset{[\leq 0]}{\geq 0}$
- $f(\underline{x}) = k \in \mathbb{R}$ costante in $X \Rightarrow \int_X f(\underline{x}) \, d\mu = k \, \mu(X)$
- Se $\mu(X) = 0$, $\int_X f(\underline{x}) \, d\mu = 0 \ \forall f$ continua in X — esempio: X segmento in $\mathbb{R}^2$, quadrato in $\mathbb{R}^3$
- $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_X \alpha f(\underline{x}) \, d\mu = \alpha \int_X f(\underline{x}) \, d\mu \ \ \forall \alpha$
- Linearità: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f, g funzioni continue in X compatto e misurabile:

$$\int_X \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu$$

spezza $\int$ rispetto alle funzioni

- Finita Additività: Se X e Y sono insiemi compatti e misurabili tali che $\mathring{X} \cap \mathring{Y} = \emptyset$ allora, se f è continua in $X \cup Y$:

$$\int_{X \cup Y} f(\underline{x}) \, d\mu = \int_X f(\underline{x}) \, d\mu + \int_Y f(\underline{x}) \, d\mu$$

spezza $\int$ rispetto agli insiemi

- Monotonia:
  - rispetto alla funzione integranda: $f \leq g$ in $X \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$ (Dim: linearità da $\int_X g - f \geq 0$)
  - rispetto all'insieme di integrazione: $f \underset{[\leq]}{\geq 0}$, $X \subseteq Y \Rightarrow \int_X f \, d\mu \underset{[\geq]}{\leq} \int_Y f \, d\mu$ — non molto usata

riccardo.polidoro.org

- $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu$

⚠ - **Teorema della Media integrale**

Se X è un insieme compatto, connesso e misurabile, ed f è continua in X, allora:

$$\exists \underline{c} \in X : \int_X f(\underline{x})\,d\mu = f(\underline{c})\,\mu(X)$$

Dim

- Se $\mu(X)=0$, $\int_X f(\underline{x})\,d\mu = 0$ e $f(\underline{c})\cdot\mu(X)=0 \quad \forall \underline{c}\in X$

- Supponiamo $\mu(X)>0$: Allora, per il Teorema di Weierstrass esistono $m=\min_X f$ ed $M=\max_X f$; per definizione:

$$m\cdot\mu(X) \le \int_X f\,d\mu \le M\cdot\mu(X) \iff m \le \frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu \le M$$

($\le$ somme di Riemann inferiori $\le$; $\le$ somme di Riemann superiori $\le$)

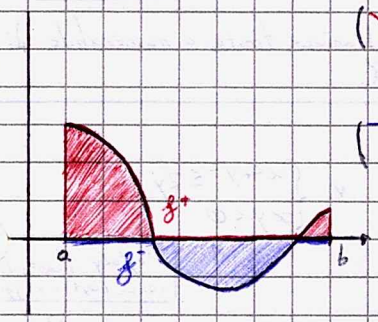
$\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu$ → Media integrale di f in X

Anche in questo caso, sfruttiamo il Teorema di Bolzano (teorema dei valori intermedi): $\forall n \ge 1$, in $\mathbb{R}^n$ occorre aggiungere alle ipotesi che X sia un connesso (da cui segue l'enunciato del teorema)

$$\exists \underline{c} \in X : \frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu = f(\underline{c})$$

Interpretazione Geometrica degli Integrali Doppi

Premessa: Funzioni di segno variabile: La funzione "si spezza" in due funzioni:



$\cap$ · $f^+ = \max_{(+,a)}\{f, 0\}$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f^+(x)\,dx = \text{area}(H^+)$ parte positiva

$\cup$ · $f^- = \min\{f, 0\}$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f^-(x)\,dx = -\text{area}(H^-)$ parte negativa

$f = f^+ + f^- \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx = \text{area}(H^+) - (\text{area } H^-)$

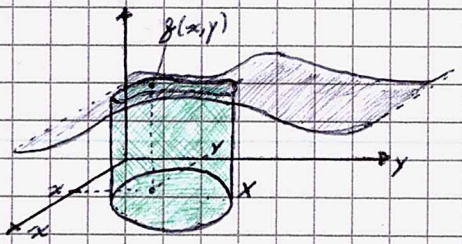
Se f è pari, $\int_{a-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Se f è dispari, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ ← molto presenti in AM 2!

Se f è continua in $X \subseteq \mathbb{R}^2$ ed è non negativa [non positiva] in X (insieme compatto e misurabile), definiamo il **cilindroide di f di base X**:

$$C(f) \equiv H = \{(x,y,z) : (x,y)\in X,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$

$$[H = \{(x,y,z) : (x,y)\in X,\ f(x,y) \le z \le 0\}]$$



Si dimostra che H è misurabile secondo Peano-Jordan e $\text{vol}(H) = \pm\iint_X f(x,y)\,dx\,dy$

A seconda che $f \gtrless 0$ in X

riccardo.polidoro.org

Se f è di segno variabile in X,

$$\iint_X f\,dx\,dy = \text{vol}(H^+) - \text{vol}(H^-)$$

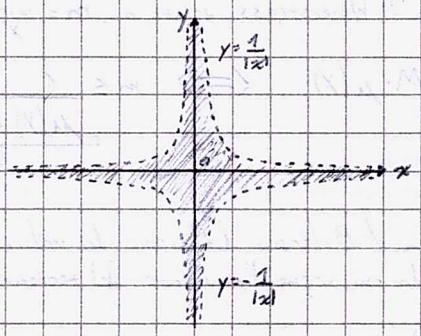
⚠ Se f è pari o dispari rispetto a una delle due variabili e il dominio è simmetrico, valgono le proprietà viste in $\mathbb{R}$ (A)

In questo corso ci limiteremo al calcolo di integrali in insiemi normali o riconducibili all'unione finita di insiemi normali, tutti riconducibili a due o più integrali semplici.

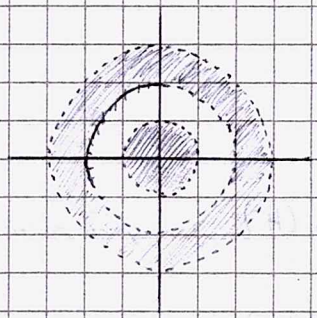
Esercizi

Calcolo di insiemi di definizione:

- $\log(1-x^2y^2)$ $\quad X: x^2y^2<1 \Rightarrow$ asse $x, y \in X$. Supponiamo $x^2 \neq 0$, $y^2 < \frac{1}{x^2} \iff \sqrt{y^2} < \frac{1}{\sqrt{x^2}} \iff |y| < \frac{1}{|x|} \iff$ $\iff -\frac{1}{|x|} < y < \frac{1}{|x|}$



- $\sqrt{\text{tg}(x^2+y^2)}$ $\quad X: \begin{cases} \text{tg}(x^2+y^2) \geq 0 \\ \cos(x^2+y^2) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k\pi \leq x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{2}+k\pi, \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ x^2+y^2 \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ circonferenze di centro O



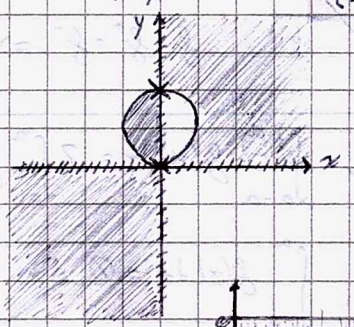
$X = \bigcup_{k \geq 0} C_k$ $\quad C_0$ cerchio aperto $\quad C_k$ corona circolare aperta per $k>0$ $\quad$ NON CONNESSO

Proposizione: Se X è un aperto di $\mathbb{R}^n$ non connesso, X è l'unione finita o numerabile di aperti connessi, detti componenti connesse di X.

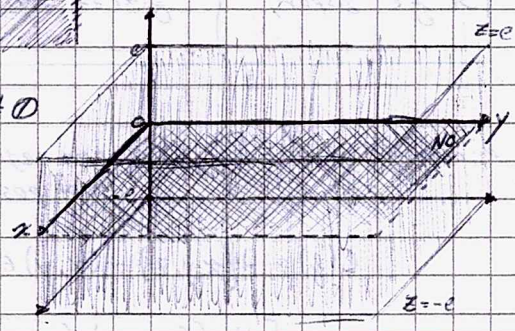
- $\sqrt{\frac{x^2+y^2-2y}{xy}}$ $\quad X: \begin{cases} xy>0 \\ x^2+y^2-2y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y^2-2y \leq 0 \\ xy<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 \geq 2y \\ xy>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y^2 \leq 2y \\ xy<0 \end{cases}$

$x^2+y^2=2y$ circonf. di centro $(0,1)$ e raggio 1

$x^2+(y-1)^2 \geq 1$



- $\sqrt{1-\log|z|}$ $\quad X: \begin{cases} \log|z| \leq 1 \\ z \neq 0 \end{cases}, \begin{cases} |z| \leq e \\ z \neq 0 \end{cases} \iff -e \leq z \leq e, \; z \neq 0$



riccardo.polidoro.org

Calcolo di Integrali Doppi

Si osserverà che è possibile semplificare gli integrali doppi in più integrali semplici (in una variabile), è però necessario lavorare in insiemi **normali**: se α, β non coincidono in un intervallo, l'insieme si dice **Dominio Normale** (altrimenti NON È UN DOMINIO)

$$H = \{(x,y) : a \le x \le b \ \text{ e } \ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

$$H = \{(x,y) : c \le y \le d \ \text{ e } \ \delta(y) \le x \le \gamma(y)\}$$

Non essendo f costanti, non ha senso parlare di prodotto cartesiano

Teorema di Riduzione degli integrali doppi

Se f è continua in $\mathbb{D}$, dominio normale rispetto all'asse x di base $[a,b]$ determinato dalle funzioni α e β (che, per ipotesi, sono continue in $[a,b]$ e tali che $\alpha(x) \le \beta(x)\ \forall x \in [a,b]$), allora f è integrabile e:

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad \text{, denotato con} \quad \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$$

$$\longrightarrow \int_a^b f(x,\beta(x)) - f(x,\alpha(x))\,dx$$

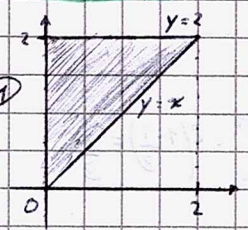
NON È UN PRODOTTO!

Se, invece, $\mathbb{D}$ è normale rispetto all'asse y $\Rightarrow$ ha base $[c,d]$ ed è determinato da δ e γ:

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f(x,y)\,dx$$

Si intuisce l'importanza di scrivere bene gli INSIEMI NORMALI

Esercizi



$$\mathbb{D}_1 = \begin{cases} \{(x,y) : 0 \le x \le 2 \ \text{ e } \ x \le y \le 2\} & \text{risp. } x \\ \{(x,y) : 0 \le y \le 2 \ \text{ e } \ 0 \le x \le y\} & \text{risp. } y \end{cases}$$

$$\iint_{\mathbb{D}_1} x e^y\,dx\,dy \overset{\text{risp. } x}{=} \int_0^2 dx \int_x^2 \underbrace{x}_{\text{va considerata come costante}} e^y\,dy = \int_0^2 x [e^y]_x^2\,dx = \int_0^2 x(e^2 - e^x)\,dx =$$

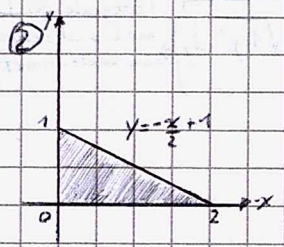
$$= 2e^2 - [xe^x]_0^2 + \int_0^2 e^x\,dx = \quad \text{(int. per parti)}$$

$$= 2e^2 - 2e^2 + e^2 = e^2 - 1$$

Volume del cilindroide della $f(x,y)$ di base $\mathbb{D}_1$

$\int_0^2 dy \int_0^y xe^y\,dx$

Verifica del segno: $\mathbb{D}_1$ è non negativo, $e^2 - 1 > 0 \Rightarrow$ OK



$$\mathbb{D}_2 = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 \ \text{ e } \ 0 \le x \le (-2y+2)\}$$

$y = -\frac{x}{2} + 1;\ 2(y-1) = -x;\ x = -2y + 2$

$$\iint (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{-2y+2} (x+y)\,dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^{-2y+2} dy = \int_0^1 \frac{4 + 4y^2 - 8y + 2y - 2y^2}{2}\,dy = \int_0^1 2 + 2y^2 - 4y + 2y - 2y^2\,dy =$$

$$= \int_0^1 2 - 2y\,dy = 2\int_0^1 1 - y\,dy = 2\left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

Volume del cilindroide della funzione $f(x,y) = x + y$ di base $\mathbb{D}_2$

riccardo.polidoro.org

Baricentro di un Dominio

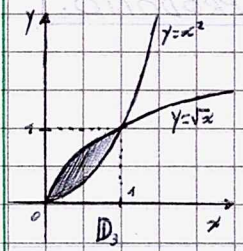
Sia $\mathbb{D}$ un dominio compatto e misurabile di $\mathbb{R}^2$ [$\mathbb{R}^3$]; esso può essere visto come la schematizzazione piana di un oggetto laminare, supposto di densità costante: analogamente alla situazione fisica, si può parlare di **baricentro**, che dalla geometria analitica sappiamo essere il punto di coordinate pari alla media delle coordinate di un poligono. Poiché ragioniamo con un insieme infinito di punti, detta operazione si tradurrà in una **media integrale**:

$$B(x_B, y_B) \in \mathbb{R}^2_2 : \quad x_B = \left(\iint_{\mathbb{D}} x\,dx\,dy\right)\cdot\frac{1}{\text{area}(\mathbb{D})}, \quad y_B = \frac{1}{\text{area}(\mathbb{D})}\iint_{\mathbb{D}} y\,dx\,dy$$

In $\mathbb{R}^3$, $B \equiv \left(\frac{1}{\text{vol}(\mathbb{D})}\iiint_{\mathbb{D}} x\,dx\,dy\,dz, \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{D})}\iiint_{\mathbb{D}} y\,dx\,dy\,dz, \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{D})}\iiint_{\mathbb{D}} z\,dx\,dy\,dz\right)$

Esercizi

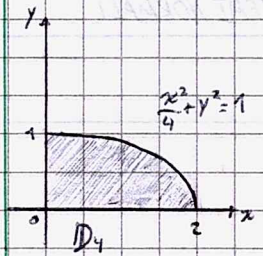
Calcoliamo il volume del cilindroide di $f(x,y) = ___$ di base $\mathbb{D}_i$:



$$\mathbb{D}_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1 \text{ e } x^2\le y\le\sqrt{x}\}$$

$$\iint_{\mathbb{D}_3} xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\frac{x}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2-x^5\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) = 1/12$$



Conviene ragionare con un dominio normale rispetto all'asse y, in modo tale da non dover ragionare con numeri razionali:

$$\mathbb{D}_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1 \text{ e } 0\le x\le 2\sqrt{1-y^2}\}$$

$$\iint_{\mathbb{D}_4} x\,dx\,dy = \int_0^1 dy\int_0^{2\sqrt{1-y^2}} x\,dx = \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\sqrt{1-y^2}}dy = \int_0^1 2(1-y^2)\,dy = 2\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Calcoliamo area($\mathbb{D}_4$):

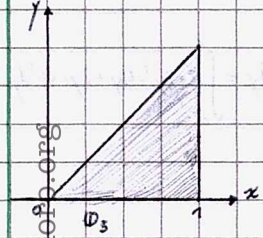
Osservazione: La circonferenza è un'ellisse particolare con semiassi coincidenti e uguali al raggio, infatti le aree si calcolano similmente: l'area di un'ellisse è πab.

$$\text{area}(D_4) = \frac{\pi(2\cdot 1)}{4} = \frac{\pi}{2} \implies x_B = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3\pi}$$

$$y_B = \frac{2}{\pi}\iint_{\mathbb{D}_4} y\,dx\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^1 2\sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{4}{\pi}\left(\left[y\sqrt{1-y^2}\right]_0^1 + \int_0^1\frac{y^2+1-1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right) = \frac{4}{\pi}\left(\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy - \int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy\right)$$

→ Scopo dell'integrazione per parti è far comparire l'integrale del I membro al secondo, con coefficiente +1

$$\Rightarrow y_B = \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = \frac{2}{\pi}\left[\text{arcsen}\,y\right]_0^1 = 1 \implies \boxed{B_{\mathbb{D}_4} = \left(\frac{8}{3\pi}, 1\right)}$$



Guardando la funzione integranda, si osserva che $dxy/dy = x \Rightarrow$ conviene scrivere $\mathbb{D}_5$ come dominio normale rispetto all'asse x (si integra prima in dy)

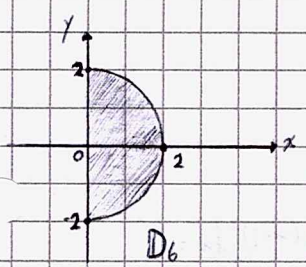
$$\mathbb{D}_5 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1 \text{ e } 0\le y\le x\}$$

$$\iint_{\mathbb{D}_5}\frac{x}{1+xy}\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^x\frac{x}{1+xy}\,dy = \int_0^1\left[\log(1+xy)\right]_0^x dx = \int_0^1\log(1+x^2)\,dx = \left[x\log(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \log 2 - 2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

($xy \ge 0$ in $\mathbb{D}_4$)

$$= \log 2 - 2\int_0^1 1-\frac{1}{1+x^2}\,dx = \log 2 - 2 + 2\left[\text{arctg}\,x\right]_0^1 = \log 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

riccardo.polidoro.org



$\mathbb{D}_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le y \le 2 \text{ e } \cancel{\sqrt{y^2}}^{\,0} \le x \le \sqrt{4-y^2}\}$

- $\iint_{\mathbb{D}_6} x - xy \, dx\,dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} x - xy \, dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}(1-y)(4-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 4 - y^2 - 4y + y^3\,dy = \frac{1}{2}\left[4y - \frac{y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right]_{-2}^{2} =$

$= 8 - \frac{8}{3} - 8 + 4 = \frac{4}{3}$

⚠ Poiché f non è pari, $\int_{-2}^{2} dy \int \cdots \neq 2\int_{0}^{2} dy \int \cdots$

- $\iint_{\mathbb{D}_6} y \, dx\,dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} y \, dx = \int_{-2}^{2} y\sqrt{4-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} -2y\sqrt{4-y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{4-y^2}\right)^3\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{3}\left[-(4-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2} = 0$

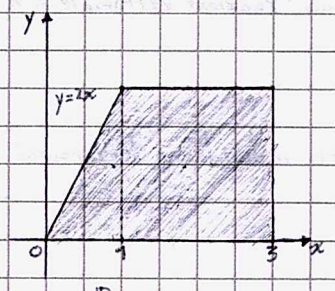
y dispari in y, $\mathbb{D}_6$ è simmetrico rispetto all'asse $x \Rightarrow 0$

y (2) · $\sqrt{4-y^2}$ (2) → f pari; f dispari → dispari; simmetrico → dispari → 0

area$(\mathbb{D}_6) = 2\pi$ $\qquad y_B = 0 \Rightarrow$ ordinata del baricentro nulla $\Rightarrow B \in$ asse x

$x_B = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}_6} x \, dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} x \, dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-2}^{2} 4 - y^2\,dy = \frac{1}{4\pi}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4\pi}\left(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{8}{3\pi}$

$B = \left(\frac{8}{3\pi}, 0\right)$



Ci sono due possibili approcci: considerare $\mathbb{D}_7$ come dominio normale rispetto all'asse y o, data la criticità del punto $(1,2)$, si considera $\mathbb{D}_7$ come unione di due domini e si applica la proprietà di additività:

$\int e^{2x}\,dx = e^x/d$

$\mathbb{D}_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2 \text{ e } y/2 \le x \le 3\}$

$\iint_{\mathbb{D}_7} e^{(x+y)}\,dx\,dy = \int_{0}^{2} dy \int_{y/2}^{3} e^{x+y}\,dx = \int_{0}^{2} e^y\left(e^3 - e^{y/2}\right)dy = \int_{0}^{2} e^y \cdot e^3\,dy - \int_{0}^{2} e^{\frac{3}{2}y}\,dy = e^3 e^3 - 1 - \left[\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right]_{0}^{2} =$

$= e^5 - \frac{2}{3}e^3 + \frac{2}{3} = e^5 - \frac{5}{3}e^3 + \frac{2}{3}$

$\mathbb{D}_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 2x\} \cup \{(x,y) : 1 \le x \le 3 \text{ e } 0 \le y \le 2\}$

$\iint_{\mathbb{D}_7} e^{(x+y)}\,dx\,dy = \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{2x} e^{x+y}\,dy + \int_{1}^{3} e^x\,dx \cdot \int_{0}^{2} e^y\,dy = \int_{0}^{1} e^x\left[e^y\right]_{0}^{2x}\,dx + \left(\left[e^x\right]_{1}^{3} \cdot \left[e^y\right]_{0}^{2}\right) =$

$= \int_{0}^{1} e^x\left(e^{2x} - 1\right)dx + \left(e^3 - e\right)\left(e^2 - 1\right) = \int_{0}^{1} e^{3x} - e^x\,dx + e^5 - e^3 - e^3 + e = \left(\frac{1}{3}\int_{0}^{1} 3e^{3x}\,dx\right) - \left[e^x\right]_{0}^{1} + e^5 - 2e^3 - e =$

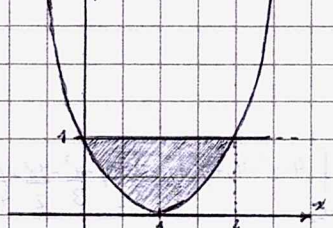
$= \frac{1}{3}\left[e^{3x}\right]_{0}^{1} - e + 1 + e^5 - e^3 - e^3 + e = 1 + e^5 - 2e^3 + \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} = e^5 - \frac{5}{3}e^3 + \frac{2}{3}$

area$(\mathbb{D}_7) = 5$ $(= 4 + 1)$

$\iint_{\mathbb{D}_7} x\,dx\,dy = \int_{0}^{2} dy \int_{y/2}^{3} x\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\left[x^2\right]_{y/2}^{3} dy = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 9 - \frac{y^2}{8}\,dy = \frac{1}{2}\left(18 - \frac{1}{4}(4)\right) = 4 \Rightarrow x_B = \frac{4}{5}$ $\left[\frac{26}{15}\right]$

$\iint_{\mathbb{D}_7} y\,dx\,dy = \int_{0}^{2} 3y - \frac{y^2}{2}\,dy = \left(6 - \frac{4}{3}\right) = \frac{14}{3} \Rightarrow y_B = \frac{14}{15}$

riccardo.polidoro.org



$$\text{area}(\mathbb{D}_8) = \int_0^2 \underbrace{1-(x-1)^2}_{\text{area(II)} \int f(x)-g(x)\,dx}\,dx = \int_0^2 2x-x^2\,dx = 4-\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\mathbb{D}_8 = \begin{cases} y=(x-1)^2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$x_B = \frac{3}{4}\iint_{\mathbb{D}} x\,dx\,dy = \frac{3}{4}\int_0^2 dx \int_{(x-1)^2}^1 x\,dy = \frac{3}{4}\int_0^2 x\left[1-(x-1)^2\right] = \frac{3}{4}\int_0^2 x-x(x-1)^2\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 x-x^3-x+2x^2\,dx = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3}-4\right) = 4-3 = 1$$

$B \equiv (1, 3/5)$

$$y_B = \frac{3}{4}\int_0^2 dx \int_{(x-1)^2}^1 y\,dy = \frac{3}{8}\int_0^2 \left[y^2\right]_{(x-1)^2}^1 dy = \frac{3}{8}\int_0^2 1-(x-1)^4\,dy = \frac{3}{8}\left[1-\frac{(x-1)^5}{5}\right]_0^2 = \frac{3}{5}$$

⚠ Come osservato, se il dominio è una porzione di cerchio, corona circolare... e si deve ricavare una variabile in funzione della altra (per esplicitarne l'espressione analitica) si ragionerà spesso con quantità irrazionali, portando a calcoli complessi e inclini all'errore; è possibile operare una tecnica analoga a quanto fatto per gli integrali per sostituzione: strutteremo le **trasformazioni**, effettuate mediante le **funzioni vettoriali**, introdotte di seguito.

Funzioni Vettoriali

Una funzione definita in un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$, che prende valori in $\mathbb{R}^k$ con $k>1$ si dice una **funzione vettoriale di n variabili reali**, e si denota con $\underline{f}$:

$$\underline{f}: \underline{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n \to \underline{f}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^k, \quad k>1$$

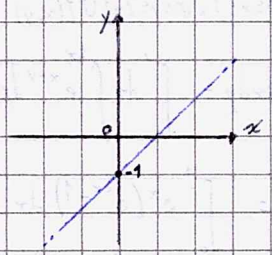
Essa viene più facilmente espressa tramite la sua espressione vettoriale: è possibile infatti individuare k funzioni scalari, tutte definite in X:

$$\underline{y} = \underline{f}(\underline{x}) \iff \begin{cases} y_1 = f_1(\underline{x}) \\ y_2 = f_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ y_k = f_k(\underline{x}) \end{cases}, \quad \underline{x} \in X \iff \underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_k(\underline{x})) \ \forall \underline{x} \in X$$

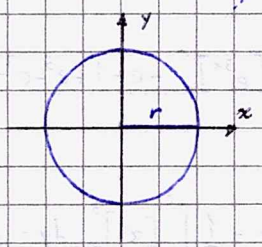
Tali funzioni scalari si dicono **componenti della funzione vettoriale** $\underline{f}$.

Esempio

- $\underline{f}(t) = (\overbrace{t}^{f_1(t)}, \underbrace{t-1}_{f_2(t)}), \ t \in \mathbb{R}$ — no sottosegno $\Rightarrow \in \mathbb{R}^1$ — codominio: $\begin{cases} x=t \\ y=t-1 \end{cases} \in \mathbb{R}^2$



- $\underline{f}(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t) \quad t \in \mathbb{R}$ — codominio:

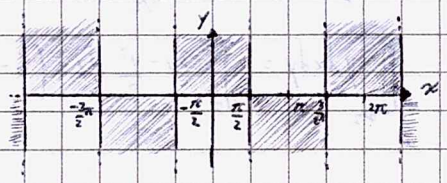


⚠ È una funzione (vettoriale)

Esercizi

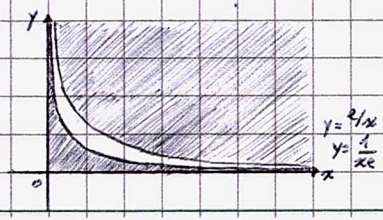
Calcolo di insiemi di definizione

- $\underline{f}(x,y) = \sqrt{y\cos x}$ — $X: y\cos x \geq 0 \iff \begin{cases} y \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y \leq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases}$



chiuso, non limitato, connesso per poligonali

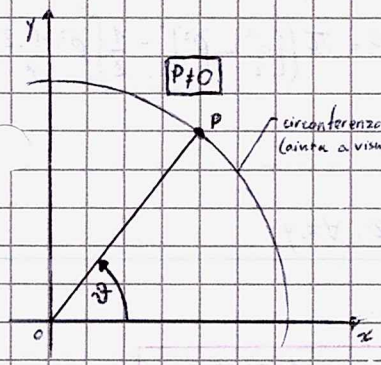
- $\underline{f}(x,y) = \sqrt{|\log y + \log x| - 1}$ — $X: \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ |\log xy| \geq 1 \end{cases} \iff xy \geq e \ \vee \ y \leq \frac{1}{ex}$



non aperto, non limitato, non chiuso, non connesso

riccardo.polidoro.org

Consideriamo ora la trasformazione in coordinate polari nel piano con polo in O e asse polare l'asse x:

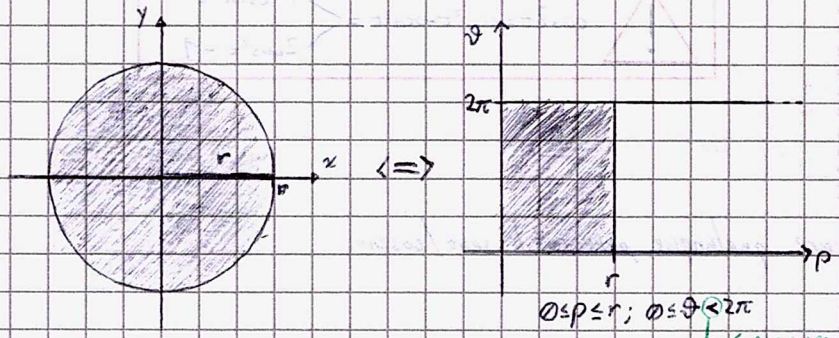


$P=(x,y)$ $\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$ univocamente determinata → raggio vettore del punto P

$\vartheta=\vartheta+2k\pi$ non univocamente determinata; l'intervallo $[-\pi,\pi]$ è detto anomalia principale → anomalia del punto P

$$\rho\geq 0,\ \vartheta\in\mathbb{R} \Rightarrow (\rho,\vartheta)\in[0,+\infty[\times\mathbb{R}$$

Definizione: O ha $\rho=0$, ϑ qualsiasi



$0\leq\rho\leq r$; $0\leq\vartheta<2\pi$ ← $\leq$ per integrare (ins. chiuso), $<$ per invertibilità

$$\varphi:(\rho,\vartheta)\in[0,+\infty[\times\mathbb{R}\to(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta\in\mathbb{R}^2)$$

Questa trasformazione è **invertibile** se ristretta ad un intervallo di ampiezza 2π (assorbe tutte le possibili anomalie).

⚠: Le componenti della funzione non sono invertibili; non occorre dunque che le componenti della funzione vettoriale siano invertibili per avere una funzione invertibile.

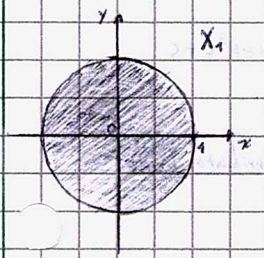
Come anticipato in precedenza, il calcolo e, in particolare, l'integrazione su cerchi, settori circolari, corone circolari ecc. porta ad operare con funzioni irrazionali; per semplificare il lavoro si sfrutta detta trasformazione: come visibile nello schema, essa trasforma questi insiemi in rettangoli, con i quali è facile lavorare:

Sia X un insieme compatto e misurabile, ed $f(x,y)$ continua in X; allora:

$$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\mathbb{D}} f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\cdot\underbrace{\rho\,d\rho\,d\vartheta}_{dx\,dy}$$

con $\mathbb{D}=\{(\rho,\vartheta):\varphi(\rho,\vartheta)\in X\}\Rightarrow X=\varphi(\mathbb{D})$

Esercizi



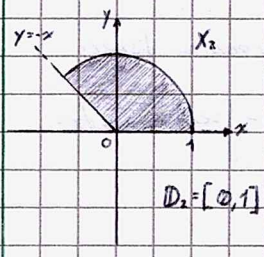
$$\iint_{X_1}(x+y)(x^2+y^2)\,dx\,dy \Longrightarrow \begin{cases}x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\operatorname{sen}\vartheta\end{cases},\ (\rho,\vartheta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$$

$$\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]}(\rho\cos\vartheta+\rho\operatorname{sen}\vartheta)\underbrace{\rho^2}_{x^2+y^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\vartheta=\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]}\rho^4(\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta=$$

estremi indipendenti dalle variabili ⇒ è un prodotto!

$$=\int_0^1\rho^4\,d\rho\cdot\int_0^{2\pi}\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{5}\Big[\operatorname{sen}\vartheta-\cos\vartheta\Big]_0^{2\pi}=0$$

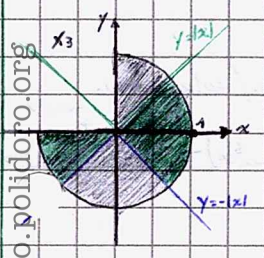
L'integrale è pari a 0; ciò è verosimile poiché la f cambia segno rispetto alla retta $y=-x$, rispetto alla quale il dominio è simmetrico!



$$\iint_{X_2}xy\,dx\,dy=\iint_{[0,1]\times[0,3/4\pi]}\rho^3\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\,d\rho\,d\vartheta=\int_0^1\rho^3\,d\rho\cdot\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{2}\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

$\int f'\cdot f=\frac{f^{n+1}}{n+1}+c$

$\mathbb{D}_2=[0,1]\times[0,\frac{3}{4}\pi]$

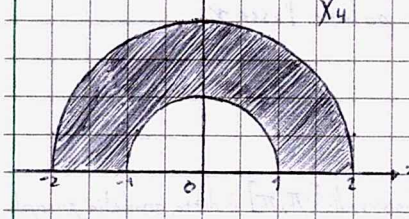


$$\iint_{X_3}(x^2-y^2)\,dx\,dy=\iint_{[0,1]\times[-\pi,\pi/2]}(\rho^2\cos^2\vartheta-\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta)\cdot\rho\,d\rho\,d\vartheta=\iint_{[0,1]\times[-\pi,\pi/2]}\rho^3(\cos^2\vartheta-\operatorname{sen}^2\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta=\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi/2}\cos^2\vartheta-\operatorname{sen}^2\vartheta=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\vartheta\right]_{-\pi}^{\pi/2}=0$$

f è non negativa se $x^2\geq y^2\Rightarrow|x|\geq|y|\Rightarrow -|x|\leq y\leq|x|$

riccardo.polidoro.org



X_4 $\quad D_4 = [1,2] \times [0,\pi]$ $\quad$ ⚠ $\rho \geq 0$ sempre

$$\iint_{X_4} \log(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{D_4} \rho \log \rho^2 \, d\rho\,d\vartheta = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_1^2 \rho \log \rho^2 \, d\rho = \pi \left(\left[\frac{\rho^2}{2} \log \rho^2 \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 \rho^2 \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot 2\rho \, d\rho \right) =$$

$\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2$

$$= \pi \left(2\log 4 - 2 + \frac{1}{2} \right)$$

Nota: l'argomento del log non è in valore assoluto perché $x^2+y^2 \geq 1 \ \ \forall (x,y) \in X_4 \Rightarrow \log(x^2+y^2) \geq 0 \ \ \forall x,y$

Integrali di potenze di seno e coseno

- $\int \operatorname{sen}^2 t \, dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2} \, dt = \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + c$ $\quad$ ($1-\cos 2t$: 2)
- $\int \cos^2 t \, dt = \int \frac{\cos 2t + 1}{2} \, dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + c$

⚠ $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \begin{cases} 1 - 2\operatorname{sen}^2 t \\ 2\cos^2 t - 1 \end{cases}$

Dalle due integrazioni proposte, è possibile integrare qualunque potenza di seno/coseno:

- Potenze pari: integrazione per parti

$$\int \operatorname{sen}^4 t \, dt = \int \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen}^3 t \, dt = -\cos t \operatorname{sen}^3 t + 3 \int \cos t \cdot \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t \, dt = -\cos t \operatorname{sen}^3 t + 3 \int \cos^2 t \cdot \operatorname{sen}^2 t \, dt =$$

$$= -\cos t \operatorname{sen}^3 t + 3 \int (1 - \operatorname{sen}^2 t) \operatorname{sen}^2 t \, dt = +\cos t \operatorname{sen}^2 t + 3 \int \operatorname{sen}^2 t \, dt - 3 \int \operatorname{sen}^4 t \, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^4 t \, dt = \frac{-\cos t \operatorname{sen}^3 t}{4} + \frac{3}{4} \int \operatorname{sen}^2 t \, dt + c$$

sai svolgere!

$\int (\operatorname{sen}^2 t)^2 \, dt = \int \left(\frac{1-\cos 2t}{2} \right)^2 dt$: sviluppi il quadrato e procedi...

- Potenze dispari: enucleando una potenza di grado 1 ottieni integrali immediati

$$\int \operatorname{sen}^5 t \, dt = \int \operatorname{sen} t \left(1 - \cos^2 t\right)^2 dt = \int \underbrace{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos^4 t - 2\cos^2 t \operatorname{sen} t}_{\text{↳ immediati}} \, dt = \cos t - \frac{\cos^5 t}{5} + \frac{2}{3}\cos^3 t + c$$

⚠ Importante è saper riconoscere in base agli estremi di integrazione i fattori/addendi che danno contributo nullo

Integrali del prodotto di potenze di seno e coseno

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx$$

- Se almeno uno degli esponenti è dispari, ci si riconduce a integrali immediati enucleando l'esponente dispari

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = \int \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = \int \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x \, dx - \int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx =$$

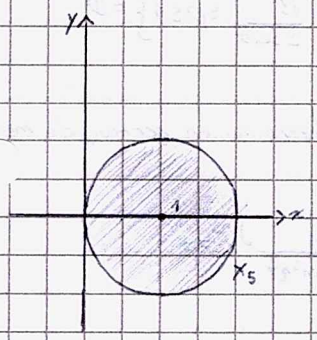
$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + c$$

- Se entrambi gli esponenti sono pari ci si riconduce ad integrali di potenze pari di solo seni/solo coseni.

$$\int \operatorname{sen}^2 x \underbrace{\cos^4 x}_{(\cos^2 x)^2} \, dx = \int \cos^4 x \, dx - \int \underbrace{\cos^6 x}_{\text{↳ risolvi prima questo (l'int. per parti va al grado -2)}} \, dx = -\int \cos x \cos^5 x \, dx + \int \cos^4 x = -(\operatorname{sen} x \cos^5 x) - 5 \int \cos^4 x \overbrace{\operatorname{sen}^2 x}^{1-\cos^4 x} \, dx + \int \cos^4 x \, dx$$

$$\Rightarrow -(\operatorname{sen} x \cos^5 x) - 5 \int \cos^4 x \, dx + 5 \int \cos^6 x \, dx + \int \cos^4 x \, dx \Rightarrow \int \cos^4 x \, dx - \int \cos^6 x \, dx = \frac{-(\operatorname{sen} x \cos^5 x)}{6} + \frac{1}{6} \int \cos^4 x \, dx \quad \ldots$$

riccardo.polidoro.org



⚠ In questo caso, la trasformazione in coordinate polari ha polo non coincidente con l'origine, ma col centro della circonferenza, frontiera di X_5:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\vartheta \\ y = y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases} \qquad (\rho,\vartheta) \in [0,r] \times [0,2\pi] \qquad C \equiv (x_0, y_0)$$

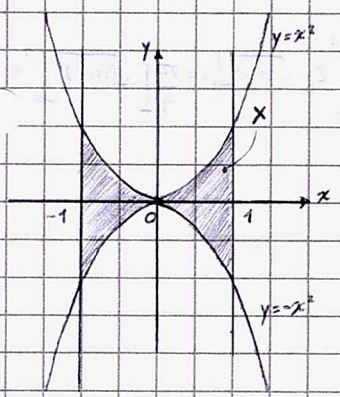
In questo caso, $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$.

$$\iint_{X_5} x^2+y^2\,dx\,dy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left[(1+\rho\cos\vartheta)^2 + \rho^2\mathrm{sen}^2\vartheta\right]\rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho^3\,d\rho + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 2\cos\vartheta\,\rho^2\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos\vartheta\,d\vartheta \int_0^1 \rho^2\,d\rho + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

($\mathbb{D}$: $2\cos\vartheta$ va da 0 a $2\cos\vartheta$)

Lo "spezzare" l'integrale in $\int_0^{\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta \int_0^1 \rho\,d\rho$ è lecito perché spezziamo in rettangoli

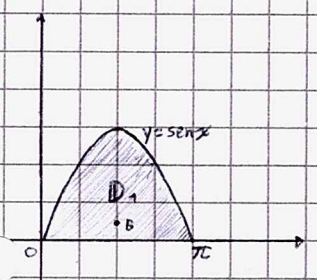


È un dominio normale solo rispetto all'asse x (rispetto all'asse y è l'unione di due insiemi normali: per essere un insieme normale dovrebbe avere per ogni retta parallela all'asse x intersezioni in un UNICO intervallo, non due.

$$\iint_X x^2+y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} x^2+y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^1 x^2\left(x^2+x^2\right)dx + \frac{1}{3}\int_{-1}^1 x^6+x^6\,dx =$$

$$= 4\int_0^1 x^4\,dx + \frac{4}{3}\int_0^1 x^6\,dx = \frac{4}{5} + \frac{4}{21}$$

funzioni pari, dominio simmetrico rispetto agli estremi di integrazione



Calcoliamo il baricentro di $\mathbb{D}_1$:

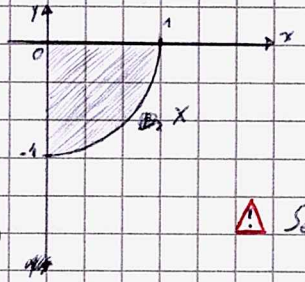
$$\text{area}(\mathbb{D}_1) = \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,x\,dx = 2$$

$$x_B = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{D}_1} x\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx \int_0^{\mathrm{sen}\,x} x\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \frac{1}{2}\left(\left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right) = \frac{\pi}{2}$$

($\int_0^{\pi}\cos x\,dx = 0$)

$$y_B = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{D}} y\,dx\,dy = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}$$

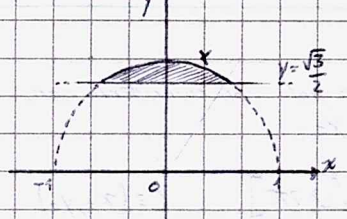
($\mathrm{sen}\,2x$ valutato in 0 e π vale 0)



$$\iint_X y-x\,dx\,dy = \iint_{[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},0\right]} \rho^2(\mathrm{sen}\,\vartheta - \cos\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta = \frac{1}{3}\left[-\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{3}(-1-1) = -\frac{2}{3}$$

⚠ Se fosse stato richiesto $\mathrm{vol}(H)$, sarebbe stato necessario valutare innanzitutto il segno della funzione: in questo caso è non positiva, dunque $\mathrm{vol}(H) = -\iint y-x\,dx\,dy = +2/3$

riccardo.polidoro.org



$$X=\left\{(x,y): y\geq\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } x^2+y^2\leq 1\right\}\equiv\left\{(\rho,\vartheta): \frac{\pi}{3}\leq\vartheta\leq\frac{2}{3}\pi \text{ e } \frac{\sqrt{3}}{2\,\mathrm{sen}\vartheta}\leq\rho\leq 1\right\}=\mathbb{D}$$

$$X=\varphi(\mathbb{D})$$

⚠ In questo caso, la trasformazione in coordinate polari non determina un rettangolo ma un insieme normale!

$$\iint_X \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}d\vartheta\int_{\frac{\sqrt{3}}{2\,\mathrm{sen}\vartheta}}^{1}\rho^2\,d\rho=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}1-\frac{3\sqrt{3}}{2^3\,\mathrm{sen}^3\vartheta}\,d\vartheta=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{8}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1}{\mathrm{sen}^3\vartheta}\,d\vartheta=*$$

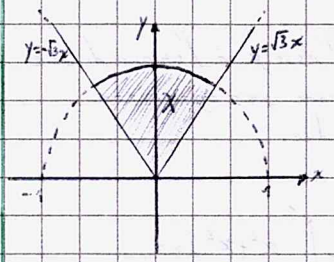
Ponendo $\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}=t$ ($\mathrm{sen}\vartheta$ ha esponente DISPARI) si ha $\vartheta=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\vartheta=\frac{2}{3}\pi\Rightarrow t=\sqrt{3}$; $d\vartheta=2\,\mathrm{arctg}\,t=\frac{2\,dt}{1+t^2}$

$\mathrm{sen}\vartheta=\frac{2t}{1+t^2}$

formule parametriche

$$*=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{32}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{(1+t^2)^2}{t^3}\,dt=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{32}\left[-\frac{1}{2t^2}+\frac{t^2}{2}+2\log t\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{32}\left(\frac{8}{3}+2\log 3\right)$$

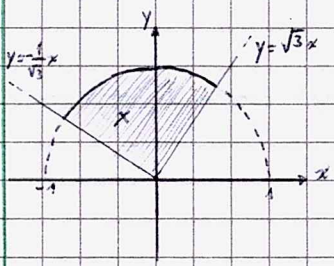
⚠ Senza trasformazione in coordinate polari, avremmo ottenuto $\int_{-1/2}^{1/2}dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, determinando calcoli MOLTO COMPLESSI.



$$\iint_X\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint_{[0,1]\times\left[\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right]}\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\,d\vartheta=\frac{\pi}{3}\int_0^1\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=\frac{\pi}{6}\int_0^1 2\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=\frac{\pi}{9}\left[\sqrt{(1+\rho^2)^3}\right]_0^1=$$

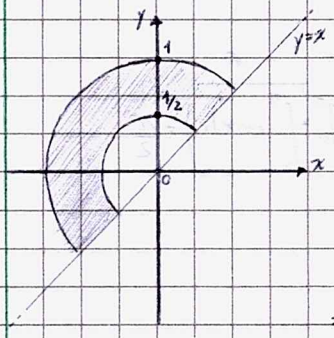
($\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}d\vartheta$)

$$=\frac{\pi}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$



$$\iint_X\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+\rho^2)^3}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}$$

$\left(\mathbb{D}=[0,1]\times\left[\frac{\pi}{3},\frac{5}{6}\pi\right]\right)$



$$\iint_X x\,\mathrm{arctg}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_{1/2}^1\rho\,d\rho\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\rho\cos\vartheta\,\mathrm{arctg}\,\rho^2\,d\vartheta=$$

$$=\int_{\sqrt{1/2}}^1\left(\rho^2\,\mathrm{arctg}\,\rho^2\right)d\rho\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta=-\frac{2}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}}^1 D\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\mathrm{arctg}\,\rho^2\,d\rho=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\left[\frac{\rho^3}{3}\,\mathrm{arctg}\,\rho^2\right]_{1/2}^1-\frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\rho^4}{\rho^2+1}\,d\rho\right]=$$

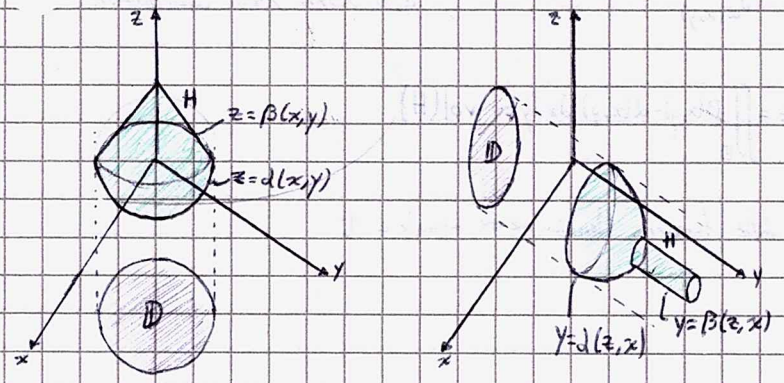
$$=-\frac{2}{3\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)\right)+\frac{4}{3\sqrt{2}}\left[\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\rho^2+1}\,d\rho+\int_{1/2}^1(\rho^2-1)\,d\rho\right]=$$

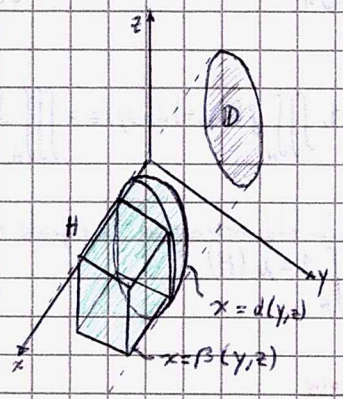
$$=-\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)\right)+\frac{4}{3\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)$$

riccardo.polidoro.org

Domini Normali in $\mathbb{R}^3$

Siano α e β funzioni continue in un insieme compatto $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che $\alpha(x,y) \leq \beta(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{D}$.
L'insieme $H = \{(x,y,z) : (x,y) \in \mathbb{D} \text{ e } \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ si dice insieme normale rispetto al piano xy.





Domini normali:

- rispetto al piano xy
- risp. al piano xz
- risp. al piano yz

⚠ L'ordine è importante!

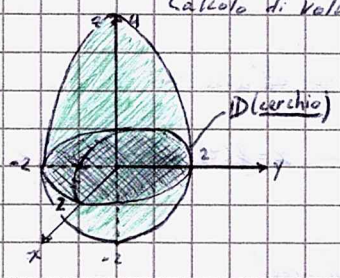
Se l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{D}$ in cui $\alpha(x,y) = \beta(x,y)$ non contiene intervalli di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{D}$ è un dominio di $\mathbb{R}^2$, allora H è un dominio di $\mathbb{R}^3$.

Se $\mathbb{D}$ è un dominio limitato misurabile di $\mathbb{R}^2$ allora H è misurabile e:

$$\text{vol}(H) = \iint_{\mathbb{D}} (\beta(x,y) - \alpha(x,y))\, dx\, dy$$

Esempi

Calcolo di volumi



Il solido H è delimitato dal paraboloide di equazione $z = 4-(x^2+y^2)$ e dalla superficie semisferica di equazione $z = -\sqrt{4-(x^2+y^2)}$

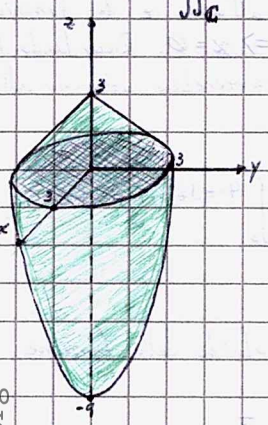
Dunque, H è un dominio normale individuato dalle funzioni:

$$\alpha(x,y) = -\sqrt{4-(x^2+y^2)}$$
$$\beta(x,y) = 4-(x^2+y^2)$$

con $(x,y) \in \mathbb{C}_{\underline{0},2}$ (cerchio; centro $\underline{0}$, raggio 2)

$$\text{vol}(H) = \iint_{\mathbb{C}} 4-(x^2+y^2) + \sqrt{4-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 (4\rho - \rho^3 + \rho\sqrt{4-\rho^2})\, d\rho = 2\pi\left[8 - 4 + \tfrac{8}{3}\right] = \frac{40}{3}\pi$$

$$\int \rho\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho = -\frac{1}{2}\int D(4-\rho^2)\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho = \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(4-\rho^2)^3}\right]_0^2$$



Il dominio H è delimitato dai diagrammi delle funzioni $z = 3-\sqrt{x^2+y^2}$ e $z = (x^2+y^2)-9$, con $(x,y) \in \mathbb{C}_{\underline{0},3}$.

$$\text{vol}(H) = \iint_{\mathbb{C}} 3 - \sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) + 9\, dx\, dy = 2\pi\int_0^3 (2\rho - \rho^2 - \rho^3)\, d\rho = \frac{99}{2}\pi$$

riccardo.polidoro.org

Se H è un dominio normale di $\mathbb{R}^3$ di base un dominio di $\mathbb{R}^2$ compatto e misurabile ed f è una funzione continua in H, f è certamente integrabile e:

$$f: H \to \mathbb{R} \text{ continua;} \quad \iiint_H f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Definizioni e risultati analoghi si hanno per domini normali rispetto agli altri piani coordinati.

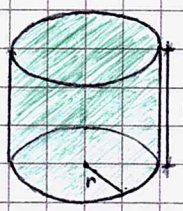
In particolare, se $f(x,y,z)=1$, $\iiint_H f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_H dx\,dy\,dz = \iint_D \beta(x,y)-\alpha(x,y)\,dx\,dy = \text{vol}(H)$

Dunque, i volumi sono calcolabili attraverso l'integrale triplo della funzione identicamente uguale a 1; ciò si estende in $\mathbb{R}^n$ $\forall n$: $\int_H 1 = \mu(H)$

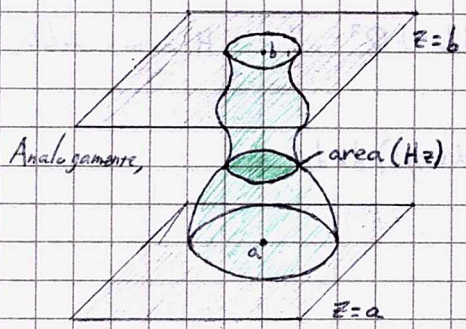
Volumi di Solidi di Rotazione

Alcuni solidi possono essere visti come rotazioni di domini normali di $\mathbb{R}^2$ attorno ad uno dei tre assi coordinati.

Dal caso più elementare (cilindro, rotazione di un rettangolo) è possibile trarre interessanti osservazioni per i cilindroidi:



$\text{vol.} = \pi r^2 \cdot h$

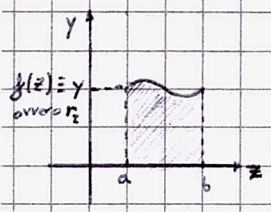


Analogamente,

$$\text{vol}(H) = \int_a^b \text{area}(H_z)\,dz$$

somma infinita di aree

In generale sappiamo dunque calcolare il volume di un qualunque rettangoloide attorno all'asse x:

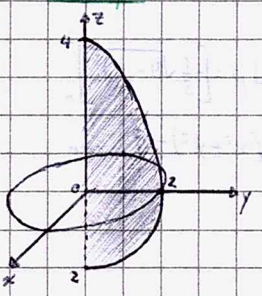


Il volume del solido ottenuto dalla rotazione del rettangoloide della funzione $x=f(z)$ con $z \in [a,b]$ e f continua in $[a,b]$ è dato da:

$$\pi \int_a^b f^2(z)\,dz$$

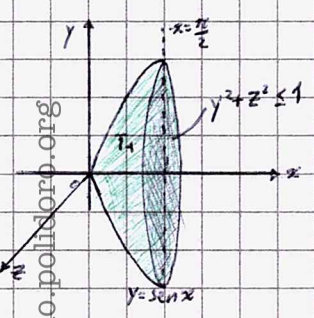
somma infinita di aree!

Esempi



Il primo solido della pagina precedente può essere visto come la rotazione attorno all'asse z del dominio in figura: occorre ragionare dunque sul piano yz (dove è posto il dominio piano) $\Rightarrow x=0$. Ricordando le funzioni esplicitate in precedenza, otteniamo dunque $z = 4-y^2$ (ma così scritta ruoterebbe attorno allo asse y!) e $y=\sqrt{4-z}$ (con $z \in [0,4]$)

$$\text{vol}(H) = \pi\left(\left(\int_0^4 \left(\sqrt{4-z}^2\right)dz\right) + \frac{2}{3}\pi \cdot 8\right) = \frac{16}{3}\pi^2 + \pi\int_0^4 |4-z|\,dz = \frac{16}{3}\pi^2 + \pi\int_0^4 4-z\,dz = \frac{16}{3}\pi^2 + 8\pi$$



T_1 può essere visto come la rotazione attorno all'asse x del rettangoloide della funzione $y=\text{sen}\,x$ con $x \in [0, \pi/2]$

$$\text{vol}(T_1) = \pi\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\,2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

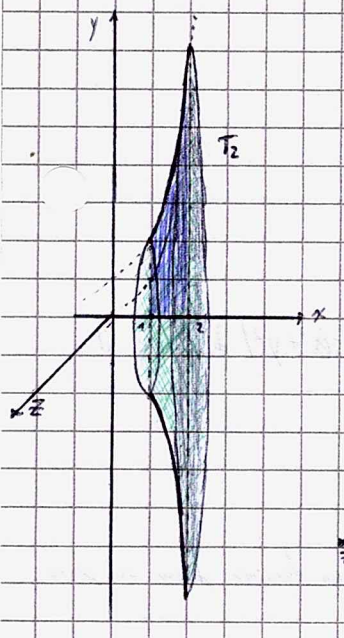
$\frac{1}{2}\left[D(2x)\frac{\text{sen}\,2x}{2}\right]$

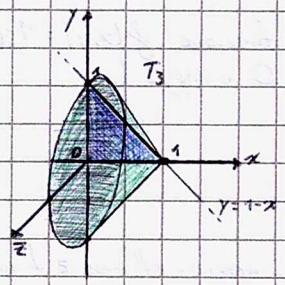
Riccardo Pollaro .org

"Rettangoloide della funzione e^x di base $[1,2]$"

$y = e^x \quad x \in [1,2]$ rotazione attorno all'asse x

$$\text{vol}(T_2) = \pi \int_1^2 e^{2x}\,dx = \pi\left(\frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2}\right)$$



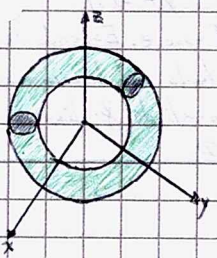


T_3: rotazione attorno all'asse x del rettangoloide della funzione ~~$1-x$~~ di base $[0,1]$

$$\text{vol}(T_3) = \pi \int_0^1 (1-x)^2\,dx = \pi\left[1 + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{\pi}{3}$$

Questa operazione non è però sempre fattibile: non tutti gli insiemi possono essere visti come rotazioni di rettangoloidi (un esempio è il toro, ottenibile come rotazione di un cerchio attorno ad un asse esterno ad esso).

Per poter calcolare questi volumi, occorre una "generalizzazione" di quanto fatto per il rettangoloide:

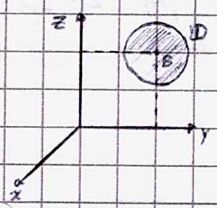


Teorema di Pappo-Guldino

Il volume di un solido ottenuto dalla rotazione di un dominio $\mathbb{D}$ piano compatto e misurabile ($\subseteq \mathbb{R}^2$) è dato dal prodotto tra l'area di $\mathbb{D}$ e la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di $\mathbb{D}$.

Guldino: matematico Svizzero del '700
Pappo di Alessandria: recentemente si è scoperto un suo calcolo mediante geometria elementare di questi volumi

Esempio



Supponiamo che $\mathbb{D}$ ruoti attorno all'asse z:

La circonferenza descritta dal baricentro di $\mathbb{D}$ ha raggio pari a y_B

$$\text{vol}(H) = 2\pi y_B \cdot \text{area}(\mathbb{D}) = 2\pi \iint_{\mathbb{D}} y\,dy\,dz$$

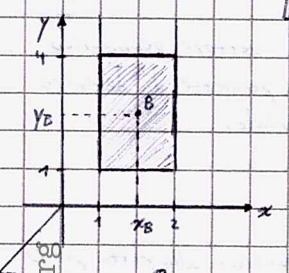
Supponendo che ruoti attorno all'asse y: il raggio della circonferenza è pari a z_B

$$\text{vol}(H') = 2\pi z_B \cdot \text{area}(\mathbb{D}) = 2\pi \iint_{\mathbb{D}} z\,dy\,dz$$

⚠: $\text{vol}(H) \neq \text{vol}(H')$!!
Attenzione alla scelta del raggio

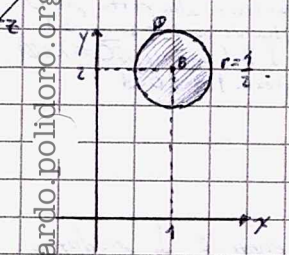
Esempio ⚠

$\mathbb{D} = [1,2] \times [1,4]$



rot. asse y: raggio x_B, $\text{vol}(H) = 2\pi \iint_{\mathbb{D}} x\,dx\,dy = 2\pi \int_1^2 dx \int_1^4 x\,dy = 6\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 6\pi \cdot \frac{3}{2} = 9\pi$

rot. asse x: raggio y_B, $\text{vol}(H') = 2\pi \iint_{\mathbb{D}} y\,dx\,dy = 2\pi \int_1^2 dx \int_1^4 y\,dy = 2\pi\left(8 - \frac{1}{2}\right) = 15\pi$



Rot. asse y:

$$\text{vol}(H) = 2\pi \iint_{C_{(1,2),1/2}} x\,dx\,dy = 2\pi \iint_{[0,1/2]\times[0,2\pi]} (1+\rho\cos\vartheta)\rho\,d\rho\,d\vartheta = 2\pi \iint_{[0,1/2]\times[0,2\pi]} \rho + \rho^2\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = 2\pi \iint_{[0,1/2]\times[0,2\pi]} \rho\,d\rho\,d\vartheta = \frac{\pi^2}{2}$$

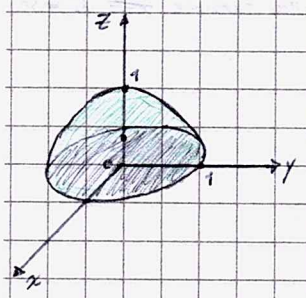
riccardo.polidoro.org

Baricentro di un Solido T (schematizzazione di un corpo di densità omogenea)

È del tutto analogo al calcolo del Baricentro in $\mathbb{R}^2$:

$$x_B = \frac{1}{\text{vol}(T)} \iiint_T x \, dx\,dy\,dz \qquad \text{analogamente per le altre coordinate}$$

Esempi



$z = 1-(x^2+y^2)$

H è il cilindroide della funzione $f(x,y) = 1-(x^2+y^2)$ di base il cerchio $\mathcal{C}$ di centro O e raggio 1.

$$\text{vol}(H) = \begin{cases} \iint_{\mathcal{C}} 1-(x^2+y^2)\,dx\,dy \\ \iiint_T 1\,dx\,dy\,dz \\ \pi \int_0^1 (\sqrt{1-z})^2\,dz \end{cases}$$

rotazione attorno all'asse z di un dominio piano sul piano yz/zx

① : $\text{vol}(H) = \iint_{\mathcal{C}} 1-(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (1-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\vartheta = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

③ : $\text{vol}(H) = \pi \int_0^1 1-z\,dz = \pi\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \begin{pmatrix} x=0 \\ y=\sqrt{1-z} \end{pmatrix}$

Osserviamo che H è simmetrico rispetto ai piani zx e yz $\Rightarrow$ il baricentro si trova sull'asse z. Essendo le funzioni usate per il calcolo del baricentro dispari, calcoleremo integrali di f. dispari in domini simmetrici $\Rightarrow = 0$

$$x_B = \frac{2}{\pi}\iiint_T x\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathcal{C}_{0,1}} dx\,dy \int_0^{1-(x^2+y^2)} x\,dz = \frac{2}{\pi}\iint_{\mathcal{C}} \pi - \pi(x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho^2\cos^2\vartheta - \rho^4\cos\vartheta\,d\rho = 0 \qquad \text{QED}$$

Calcoliamo dunque $z_B = \frac{2}{\pi}\iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathcal{C}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-(x^2+y^2)} dx\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (1+\rho^4-2\rho^2)\rho\,d\rho = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho+\rho^5-2\rho^3\,d\rho =$

$$= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow B \equiv (0,0,1/3)$$

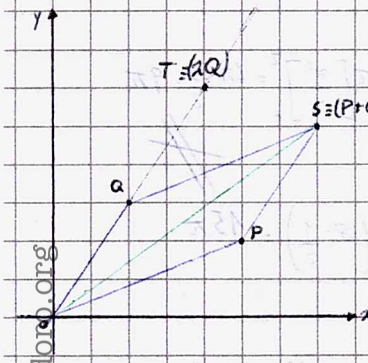
Richiami di Geometria: Lo Spazio Euclideo come Spazio Vettoriale

Base per lavorare con le FUNZIONI VETTORIALI

$\mathbb{R}$ (retta orientata), Π (piano orientato euclideo), Σ (spazio orientato euclideo) sono associati agli spazi vettoriali su campo reale $V_{\mathbb{R}}$ ($\dim = 1$), V_Π ($\dim = 2$), V_Σ ($\dim = 3$), studiati come spazi vettoriali geometrici

$\dim$ = numero di vettori della base $\equiv$ MAX numero vettori lin. indip.

Tentiamo di dare struttura di Spazio Vettoriale a Π (analogamente per Σ)



Per ogni punto P si considera il segmento orientato $\overrightarrow{OP}$ e dunque il vettore geometrico $\underline{u} = \overrightarrow{OP}$. Esiste dunque una corrispondenza biunivoca tra Σ e V_Σ che ci permette di definire operazioni che strutturano lo spazio euclideo Σ come uno spazio vettoriale.

Somma tra punti: $P+Q = S \iff \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS}$

Prodotto di un punto P per uno scalare λ: $T = \lambda Q \iff \overrightarrow{OT} = \lambda\,\overrightarrow{OQ}$ $\Rightarrow$ T appartiene alla retta per O e Q, ha verso dipendente dal segno di λ (concorde a $\overrightarrow{OQ} \Rightarrow \lambda \geq 0$) e lunghezza $|\lambda| \cdot \|\overrightarrow{OQ}\|$

Elemento neutro rispetto alla somma: è l'origine $O \equiv \overrightarrow{OO} \equiv \underline{0}$

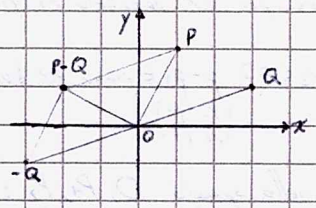
Esistenza dell'opposto rispetto alla somma: $-P$ è il simmetrico di P rispetto all'origine

Dunque, Π [Σ] ha la struttura di spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma di due punti e di prodotto di un punto per uno scalare.

politecnico.polidoro.org

Data l'esistenza degli opposti, è possibile operare la differenza di due punti come somma di un punto e l'opposto dell'altro:

$$P-Q = P+(-Q)$$



Osservazione: $\overrightarrow{O(P-Q)} = \overrightarrow{QP}$

Norma di un Punto: $P(x,y,[z])$; $\|P\| = \sqrt{x^2+y^2[+z^2]} \equiv d(O,P)$

Due punti P e Q si dicono linearmente dipendenti se $\exists \lambda \in \mathbb{R} : Q = \lambda P$, ovvero se P e Q giacciono sulla stessa retta per l'origine.

Ne segue che l'equazione vettoriale di una retta per un punto Q e per l'origine (solitamente P è considerato variabile) è:

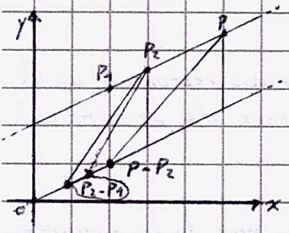
$$r: P = \lambda Q$$

Questa equazione equivale ad n equazioni scalari, con n pari alla dimensione dello spazio in cui stiamo lavorando:

$$P \equiv (x,y), \quad r: \begin{cases} x = \lambda Q_1 \\ y = \lambda Q_2 \end{cases} ; \qquad P \equiv (x,y,z), \quad r: \begin{cases} x = \lambda Q_1 \\ y = \lambda Q_2 \\ z = \lambda Q_3 \end{cases}$$

"Equazioni parametriche di una retta per Q e per l'origine

Retta per due punti non passante per l'origine: Si considera la retta passante per l'origine parallela alla retta data:



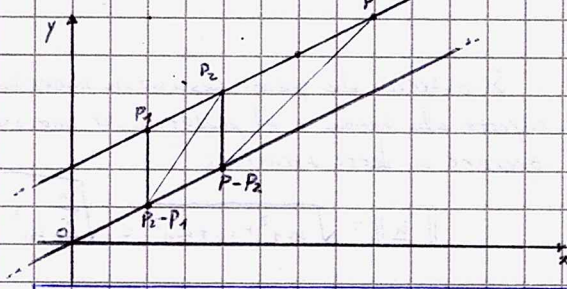
$$P - P_1 = \lambda(P_2 - P_1) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$P = P_1 + \lambda(P_2 - P_1)$$

$P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$
$P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$

equazioni parametriche: $\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}$



Ciò perché i punti P, P_1 e P_2 appartengono a una stessa retta r $\Leftrightarrow$ $P-P_1$ e P_2-P_1 appartengono alla parallela ad r per O

Limitando λ (es. $\lambda \geq 0$) otteniamo semirette

Limitando λ all'intervallo $[0,1]$, otteniamo il segmento P_1P_2 (infatti, $|x-x_1| \leq |P_2-P_1|$)
Ciò implica che l'equazione vettoriale del segmento P_1P_2 coincide con l'equazione vettoriale della retta per P_1 e P_2 con $\lambda \in [0,1]$

Solitamente in V_Σ si utilizzano per comodità i vettori $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ come vettori di una base; nello spazio Σ (costituito da punti) essi coincidono ai punti $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$; corrispondendo a tre vettori e valendo le proprietà di spazio vettoriale, Σ si dice spazio vettoriale euclideo di dimensione 3.
Logicamente, in π la base è $\{(1,0),(0,1)\} \Rightarrow$ spazio vettoriale euclideo di dimensione 2.

Equazioni di una retta per due punti (cartesiana):

Se p_1, p_2 sono due punti non paralleli a un asse coordinato, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Dunque:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{cases}$$

→ eq. cartesiana della retta per due punti, dalla quale si arriva alla forma $ax+by+c=0$ moltiplicando ambi i membri per y_2-y_1 e x_2-x_1

riccardo.polidoro.org

Equazioni di un piano π per tre punti non allineati

Si considera un piano passante per O parallelo al piano assegnato:

$$\rho \in \text{piano per } \rho_1,\rho_2,\rho_3 \iff \rho-\rho_1 \in \text{piano per l'origine parallelo a } \pi \iff \underbrace{\rho-\rho_1=\alpha(\rho_2-\rho_1)+\beta(\rho_3-\rho_1)}_{\text{eq. vett.}} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$(\rho_3-\rho_1),(\rho_2-\rho_1)$

Ciò perché, presi tre punti nello spazio O, P_1, P_2: $P_1, P_2 \neq O$ e $P_1 \neq P_2$ non sono allineati rispetto ad O (e, dunque, P_1 e P_2 sono linearmente indipendenti), una qualsiasi combinazione lineare di questi due punti appartiene al piano per O, P_1 e P_2:

$$\rho = \alpha\rho_1+\beta\rho_2 \iff \rho \in \text{piano individuato da } O,P_1,P_2 \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

→ equazione vettoriale per O, P_1 e P_2

Le equazioni scalari del medesimo piano sono: $\begin{cases} x=\alpha x_1+\beta x_2 \\ y=\alpha y_1+\beta y_2 \\ z=\alpha z_1+\beta z_2 \end{cases}$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Di conseguenza, le eq. scalari di un piano per tre punti qualsiasi sono $\begin{cases} x=x_1+\alpha(x_2-x_1)+\beta(x_3-x_1) \\ y=y_1+\alpha(y_2-y_1)+\beta(y_3-y_1) \\ z=z_1+\alpha(z_2-z_1)+\beta(z_3-z_1) \end{cases}$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Gli elementi di $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ $n>1$ sono coppie, terne, ..., n-ple di numeri reali:

$\underline{u}=(u_1,\dots,u_n)$ $\underline{u}\in\mathbb{R}^n$
$\underline{v}=(v_1,\dots,v_n)$ $\underline{v}\in\mathbb{R}^n$

$\underline{u}+\underline{v}=(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)$ costruzione geometrica della somma delle componenti dei vettori in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$, estesa ad $\mathbb{R}^n$

$$\lambda\underline{u}=(\lambda u_1,\dots,\lambda u_n)$$

Si osserva che questa costruzione numerica rispetta le condizioni di spazio vettoriale $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare. Infatti possiamo definire analogamente gli altri strumenti che permettono di operare in dette strutture:

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{u_1^2+\dots+u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

somma dei quadrati delle componenti (rispetto a una base, tipicamente ortonormale $B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$: $e_i=\delta_{ij}$), ovvero dei coefficienti che esprimono il vettore come comb. lineare dei vettori della base: $\underline{u}=\sum_{i=1}^{n} u_i\underline{e}$

Una k-pla di vettori di $\mathbb{R}^n$ $\underline{u_1},\dots,\underline{u_k}$ si dice **linearmente dipendente** se esistono $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ scalari NON TUTTI NULLI tali che $\lambda_1\underline{u_1}+\lambda_2\underline{u_2}+\dots+\lambda_k\underline{u_k}=\underline{0}$. Ciò assicura che almeno uno dei vettori della k-pla può essere espresso come combinazione lineare dei restanti $k-1$ vettori.

Analogamente, si dice linearmente indipendente una k-pla di vettori in cui l'unica combinazione lineare che restituisce il vettore nullo è quella con $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ necessariamente TUTTI NULLI.

Si definisce base un insieme di vettori linearmente indipendenti che è contemporaneamente un sistema di generatori (di conseguenza, ogni vettore dello spazio si esprime in un unico modo come combinazione lineare dei vettori della base).

Dunque, $\mathbb{R}^n$ è uno **spazio vettoriale numerico di dimensione n**; per $n>3$ non ha una controparte geometrica.

In $\mathbb{R}^n$, $\|\underline{u}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i)^2}$

$\|\underline{u}+\underline{v}\| \le \|\underline{u}\|+\|\underline{v}\|$ disuguaglianza triangolare
$\|\lambda\underline{u}\| = |\lambda|\,\|\underline{u}\|$
$\|\underline{u}\| \ge 0 \quad \forall \underline{u}\in\mathbb{R}^n$

Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

Poiché in $\mathbb{R}^2 \equiv \pi$ $\rho_1\cdot\rho_2=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\|\rho_1\|\cdot\|\rho_2\|\cos\delta$, ovvero il prodotto tra la componente di uno dei vettori geometrici rispetto all'altro, si dimostra che, essendo il prodotto scalare un'operazione bilineare (lineare nella prima variabile se fissa la seconda e viceversa), è possibile effettuare la stessa operazione scrivendo i due vettori per componenti rispetto alla base ortonormale: in questo modo, il prodotto scalare è pari alla somma dei prodotti delle coordinate corrispondenti per definizione. Ciò si estende ad $\mathbb{R}^n$, dove tipica base ortonormale è $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$: $\underline{u}\cdot\underline{v}=\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

appunti.coconino.org

Ricordiamo l'equazione vettoriale di una retta per due punti: $R: p = p_1 + \lambda(p_2 - p_1) \iff R = \{p \in \Sigma : \exists \lambda \in \mathbb{R} : p = p_1 + \lambda(p_2 - p_1)\ \forall \lambda\}$

$\iff R = \{p_1 + \lambda(p_2 - p_1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ → "al variare di λ in $\mathbb{R}$"

p_1: punto fissato; $(p_2 - p_1)$: vettore direzione della retta ($p_2 \neq p_1$)

Ciò vale anche in $\mathbb{R}^n$: una retta si definisce a partire da 2 condizioni: il passaggio per un punto (struttura insiemistica, è sia un punto che un vettore) di $\mathbb{R}^n$ e l'assegnazione di una direzione.

Una generica retta R di $\mathbb{R}^n$ passa per il punto $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ ed ha direzione $\underline{v}$, con $\underline{v} \neq \underline{0}$ (per comodità, spesso si utilizza $\underline{v}: \|\underline{v}\| = 1$, $\underline{v}$ è dunque un versore); ciò si definisce analiticamente come:

$$R = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = \underline{x_0} + t\underline{v},\ t \in \mathbb{R}\}$$ (t: al variare di t in $\mathbb{R}$)

$\underline{p_1} \in \mathbb{R}^n$; $\underline{p_2} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{p} = \underline{p_1} + t(\underline{p_2} - \underline{p_1})$, $t \in \mathbb{R}$ — retta per due punti in $\mathbb{R}^n$

Se $t \in [0,1]$, $\overline{p_1 p_2}$ segmento in $\mathbb{R}^n$

È inoltre importante definire:

- Sfere aperte/chiuse di centro $\underline{x_0}$ in $\mathbb{R}^n$ (già trattate)
- Parallelepipedo in $\mathbb{R}^n \equiv$ intervallo in $\mathbb{R}^n \equiv$ prodotto cartesiano di intervalli di n $\equiv [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Si possono anche costruire parallelepipedi di centro $\underline{x_0}$:

$$[x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1] \times \dots \times [x_n^0 - \delta_n, x_n^0 + \delta_n] = \prod_{i=1}^{n} [x_i^0 - \delta_i, x_i^0 + \delta_i]$$ se $\delta_1 \dots \delta_n$ tra loro, è un cubo!

Limiti e Continuità di funzioni scalari e vettoriali

Già trattati, riprendiamo per il calcolo.

- Funzioni scalari: $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sia $\underline{x_0}$ punto di accumulazione per X

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall I_l\ \exists I_{x_0} : f(\underline{x}) \in I_l\ \forall \underline{x} \in I_{x_0} \cap (X - \{\underline{x_0}\})$$

- Funzioni vettoriali: $\underline{f}: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, sia $\underline{x_0}$ punto di accumulazione per X

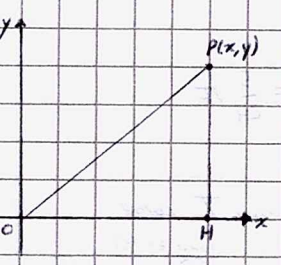
(Gli intorni sono sfere aperte di centro $\underline{x_0}$ ed $\underline{l}$)

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l} \in \mathbb{R}^k \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}\| < \varepsilon\ \forall \underline{x} \in X : 0 < \|\underline{x} - \underline{x_0}\| < \delta$$

($\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}\|$: norma in $\mathbb{R}^k$ del vettore differenza; $\|\underline{x} - \underline{x_0}\|$: norma in $\mathbb{R}^n$ del vettore differenza)

Questa condizione equivale a richiedere che le componenti (scalari) del vettore $\underline{f}(\underline{x})$ tendano alle omonime componenti di $\underline{l}$: $\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f_1(\underline{x}) = l_1, \dots, \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f_k(\underline{x}) = l_k$

Esempio



$\|OH\| + \|HP\| \geq \|OP\| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \|OH\|; \|HP\| \iff |x| + |y| \geq \sqrt{x^2+y^2} \geq |x|$ $[|y|]$

($\|OP\|$: distanza dall'origine)

Per un vettore di $\mathbb{R}^k$, la norma del vettore è sempre maggiore o uguale alla norma delle singole componenti del vettore e minore o uguale della somma dei valori assoluti delle componenti. Ne segue che:

$$\|f_i(\underline{x}) - \underline{l_i}\| \leq \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}\| \leq \sum_{i=1}^{k} |f_i(\underline{x}) - l_i| \qquad \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}\| \to 0 \Rightarrow |f_i(\underline{x}) - l_i| \to 0$$

Risultati sui limiti delle funzioni SCALARI

- Teorema di unicità del limite — vale allo stesso modo delle f in una variabile
- Limite delle restrizioni — se una f ha per limite l, prendendo un sottoinsieme di X tale che $\underline{x_0}$ sia di acc. il $\lim_{x \to x_0} f$ NON CAMBIA. Importante è la negazione: se ho due sottoinsiemi di X tale che $\underline{x_0}$ è di acc. e trovo limiti diversi (o la restrizione del limite non esiste), il limite in tutto X NON ESISTE.
- Carattere locale del limite — "Quel che succede lontano da $\underline{x_0}$ non influenza l'esistenza e il calcolo del limite"
- T. di confronto e permanenza del segno — Disug. limiti $\neq$ disug. limiti, se una f è nulla è T. permanenza segno
- Operazioni tra limiti — Con conseguenze di tutte le forme indipendenti $\Rightarrow$ c.lin. lim convergenti è conv.
- Limite di funzioni composte — $\lim_{x \to x_0} g \circ f = \lim_{y \to y_0} g(y_0)$

riccardo.polidoro.org

Poiché una funzione scalare è continua in un punto x_0 di accumulazione per X e appartenente a X se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, si ottiene che:

- Se $f(x_0) > 0$ $[< 0]$, esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) > 0$ $[< 0]$ $\forall x \in I \cap X$.
- Somma, prodotto, rapporto, composte di funzioni continue sono continue (in un punto)
- → Le funzioni dotate di espressione elementare sono sempre continue nel loro insieme di definizione

Risultati sui limiti delle funzioni vettoriali

⚠ # teoremi di confronto poiché # ≤ totale compatibili con le operazioni definite in $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$

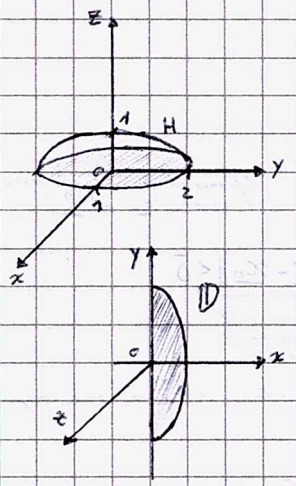
- Unicità del limite
- Limite delle restrizioni
- Carattere locale del limite
- Limite della somma di funzioni vettoriali
- Limite del prodotto di una funzione vettoriale per uno scalare — $\lim \lambda f = \lambda \lim f$ ⇒ $\lim$ comb. lin f = c. lin. $\lim f$
- Limite del prodotto scalare delle funzioni vettoriali — $\lim f \cdot \lim g = \lim \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot m_i$; vale per le singole componenti
- Limite delle funzioni composte

Dunque: La combinazione lineare di funzioni vettoriali continue determinano funzioni continue, il prodotto scalare di funzioni continue è una funzione scalare continua; la composta di funzioni continue è una funzione continua.

Es: $\|f\|$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\|\ \|: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

segmenti e rette in $\mathbb{R}^n$: $\{P \in \mathbb{R}^n : P = p_1 + t(p_2 - p_1),\ t \in \mathbb{R}^{[0,1]}\}$ ↳ sottodomini di funzioni vettoriali continue!

Esercizi (integrali)



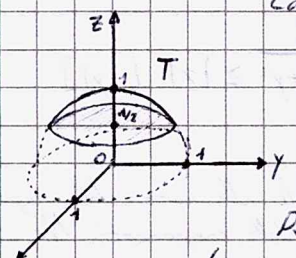
H è il solido ~~esterno~~ delimitato dall'ellissoide di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ e dal piano xy, contenuto nel piano $z \geq 0$

H è dunque un solido di rotazione attorno all'asse y (NON L'ASSE X: l'ellisse di base ha ovviamente raggio variabile!), ottenuto da una rotazione di ampiezza π dell'insieme $\mathbb{D}$, rettangoloide della funzione $h(y) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$ di base $[-2, 2]$

$$\text{vol}(H) = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^{2} 1 - \frac{y^2}{4}\, dy = \frac{4}{3}\pi$$

In generale, per una qualunque rotazione di ampiezza α, $\text{vol}(H) = \frac{\alpha}{2} \int_a^b f^2(x_i)\, dx_i$

Calotta Sferica



$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ con $z \geq 1/2$ B?

$$\text{vol}(T) = \pi \int_{1/2}^{1} \left(\sqrt{1 - z^2}\right)^2 dz = \pi \int_{1/2}^{1} 1 - z^2\, dz = \pi \left[z - z^3/3\right]_{1/2}^{1} = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{11}{24}\right) = \frac{5}{24}\pi$$

Per il calcolo degli integrali tripli per la determinazione del baricentro, scriviamo T come dominio normale: $T = \{(x,y,z) : (x,y) \in C_{0,\sqrt{3}/2},\ \frac{1}{2} \leq z \leq f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ (base: $z = 1/2$)

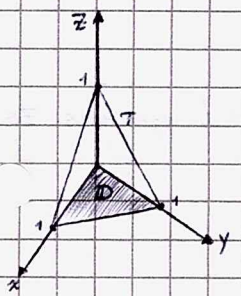
→ proiezione della calotta su xy: $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ ⇒ $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Per ragioni di simmetria, sappiamo che B appartiene all'asse z ⇒ occorre il solo calcolo di z_B:

$$z_B = \frac{24}{5\pi} \iiint_T z\, dx\, dy\, dz = \frac{24}{5\pi} \iint_{C_0} dx\, dy \int_{1/2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\, dz = \frac{12}{5\pi} \iint 1 - x^2 - y^2 - \frac{1}{4}\, dx\, dy = \frac{12}{5\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{3}{4}\rho - \rho^3\, d\rho =$$

$$= \frac{24}{5}\left[\frac{3}{8}\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{24}{5}\left(\frac{9}{32} - \frac{9}{64}\right) = \frac{24}{5} \cdot \frac{9}{64} = \frac{27}{40} = \frac{27}{40}$$

riccardo.polidoro.org



T è il cilindroide di una funzione non negativa (il diagramma è una porzione di piano); lo individuiamo mediante l'equazione del piano passante per 3 punti, esplicitata in z e dunque in funzione di x e y:

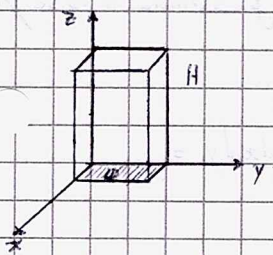
$$p_1=(1,0,0),\ p_2=(0,1,0),\ p_3=(0,0,1)$$

$$p=p_1+\alpha(p_2-p_1)+\beta(p_3-p_1) \Rightarrow \begin{cases} x=1+(-1)\alpha+(-1)\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1-y-z \\ \downarrow \\ -z=x+y-1 \Rightarrow z=1-(x+y) \end{array}$$

$f(x,y)=1-x-y \Rightarrow D=\{x,y:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$ normale rispetto all'asse x

$$vol(T)=\iint_D 1-x-y\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}1-x-y\,dy=\int_0^1 1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}=\int_0^1 1-2x+x^2-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}+x\,dx=$$

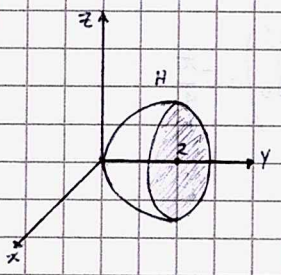
$$=\int_0^1 \frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$



$H=[0,1]\times[0,2]\times[0,3] \Rightarrow T=\{(x,y,z):(x,y)\in[0,1]\times[0,2],\ 0\le z\le 3\}$ (cils. normale)

$$\iiint_H y-x\,dx\,dy\,dz?$$

$$\iiint_T y-x\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_0^3 y-x\,dz=3\int_0^1 dx\int_0^2 y-x\,dy=3\int_0^1 2-2x\,dx=6\left(1-\frac{1}{2}\right)=3$$

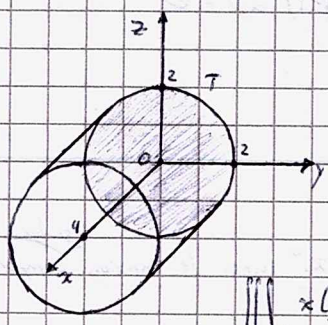


H è delimitato dal paraboloide d'equazione $y=x^2+z^2$ e il piano $y=2$

$$H=\{(x,y,z):(z,x)\in C_{0,\sqrt{2}}\ \text{e}\ x^2+z^2\le y\le 2\}$$ dominio normale rispetto a zx

$$\iiint_H zy\,dx\,dy\,dz=\iint_{C_{0,\sqrt{2}}} dz\,dx\int_{x^2+z^2}^2 z\,y\,dy=\frac{1}{2}\iint_{C_{0,\sqrt{2}}} z\left(4-(x^2+z^2)^2\right)dz=\frac{1}{2}\iint_{C_{0,\sqrt{2}}} 4z-z(x^2+y^2)^2\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\vartheta\int 4\rho^2\cos\vartheta-\rho^2\cos\vartheta\,(\rho^2)^2\,d\rho=\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_T \cos\vartheta\,(4\rho^2-\rho^6)\,d\rho=0$$



T è delimitato dal cilindro di equazione $x^2+z^2=4$ (in Σ, non dipende da y $\Rightarrow$ cilindro) e dai piani $x=0$, $x=4$

$$\iiint_T x(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

Scriviamo T come dominio normale rispetto a z

$T=\{(x,y,z):(y,z)\in C_{0,2},\ 0\le x\le 4\}$

$$\iiint_T x(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\iint_{C_{0,2}} dy\,dz\int_0^4 x(y^2+z^2)\,dx=8\iint_{C_{0,2}} y^2+z^2\,dy\,dz=8\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^2\rho^3\,d\rho=16\pi\cdot 4=64\pi$$

Alt: rotazione asse x del rettangolo $D=[0,4]\times[0,2]$: $z=0$, $x=4$, $y=2$

$$\mu(D)=8,\qquad \pi\int_0^2 (8)^2\,d?\ =64\pi$$

riccardo.polidoro.org

⚠ Non è importante il disegno, ma il saper scrivere bene gli insiemi normali!

T è la porzione di spazio delimitata dalla superficie cilindrica di equazione $x^2+y^2=1$ e dai piani di equazione $z=-2$, $z=4+x$.

$$\alpha(x,y)=-2, \qquad \beta(x,y)=(4+x)$$

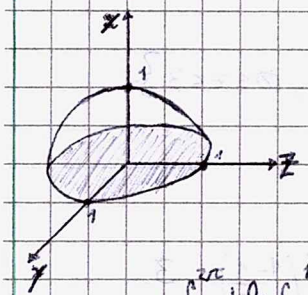
$$T=\{(x,y,z) : (x,y)\in \mathcal{C}_{0,1},\ -2\le z\le 4+x\}$$

$$\iiint_T x-y\,dxdydz = \iint_{\mathcal{C}} dxdy\int_{-2}^{4+x} x-y\,dz = \iint_{\mathcal{C}} x(4+x)-y(4+x)\ \cancel{+2y}\ \cancel{-2x}\ -2y\,dxdy = \iint_{\mathcal{C}} 6x+x^2-6y-xy\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \underbrace{6\rho^2\cos\vartheta}_{\int_0^{2\pi}=0} + \rho^3\cos^2\vartheta - \underbrace{6\rho^2\operatorname{sen}\vartheta}_{=0} - \underbrace{\rho^3\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}_{=0}\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^1 \rho^3\cos^2\vartheta\,d\rho = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}d$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\,d\vartheta = \frac{\vartheta}{2}+c$$



Semisfera di raggio 1 nel semispazio $x\ge 0$ ⇒ cilindroide di una f continua di base yz

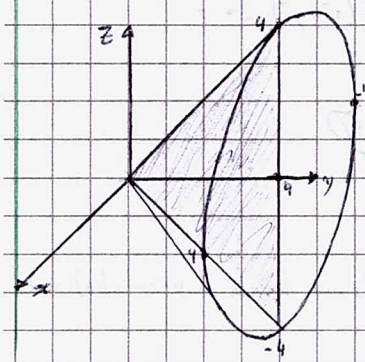
$$x=\sqrt{1-(z^2+y^2)} \quad \text{con } (y,z)\in \mathcal{C}_{0,1}$$

$$\iiint y^2+z^2\,dxdydz = \int_{\mathcal{C}_{0,1}} dydz\int_0^{\sqrt{1-(y^2+z^2)}} y^2+z^2\,dx = \int_{\mathcal{C}_{0,1}} (y^2+z^2)\sqrt{1-(y^2+z^2)}\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^1 \underbrace{\rho^3\sqrt{1-\rho^2}}_{\text{int. PARTI}}\,d\rho = 2\pi\int_0^1 \rho^2\left(\rho\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho = -\pi\int_0^1 \rho^2\left(-2\rho\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho =$$

$$= -\pi\left[\underbrace{\left[-\frac{1}{3}\rho^2\sqrt{(1-\rho^2)^3}\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{3}\int_0^1 2\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\right] = +\frac{\pi}{3}\int_0^1 -2\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{3}\left[\sqrt{(1-\rho^2)^3}\right]_0^1\right) = -\frac{\pi}{9}$$

Cono con vertice nell'origine dato da $y=\sqrt{x^2+z^2}$ con $y\le 4$



$$\iint_{\mathcal{C}_{0,4}} dxdz\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^4 z\,dy = \iint_{\mathcal{C}_{0,4}} z\left(4-\sqrt{x^2+z^2}\right)dxdz = \iint_{\mathcal{C}_{0,4}} 4z-z\sqrt{x^2+z^2}\,dzdx =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^4 4\rho^2\cos\vartheta - \rho^2\cos\vartheta\sqrt{\rho^2}\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\vartheta\int \rho^2\cos\vartheta\,(4-|\rho|)\,d\rho = 0$$

(↳ $=0$)

Continuità di Funzioni Vettoriali

Una funzione vettoriale $\underline{f}$ si dice continua in un punto $\underline{x_0}$ se e soltanto se sono continue in x_i° tutte le funzioni scalari componenti f_i, $\forall i=1,\dots,k$

$$\underline{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k \text{ continua in un punto } \underline{x_0} \iff f_i \text{ continue in } x_i^\circ\ \forall i=1,\dots,k$$

Proprietà

- composte di funzioni vettoriali continue sono continue
- somme di funzioni vettoriali continue sono continue
- il prodotto di uno scalare per una funzione vettoriale continua è continua

$\Rightarrow \forall \alpha,\beta,\ \alpha\underline{f}+\beta\underline{g}$ (combinazione lineare) continue in $\underline{x_0}$ se $\underline{f},\underline{g}$ sono continue in $\underline{x_0}$

- Se $\underline{f},\underline{g}$ sono continue in $\underline{x_0}$, $\underline{f}\cdot\underline{g}$ è una funzione scalare continua in x_0
- $\|\underline{f}\|$ è continua in $\underline{x_0}$ se $\underline{f}$ lo è.

riccardo.polidoro.org

I teoremi visti per le funzioni scalari si estendono facilmente alle funzioni vettoriali:

Teorema di Bolzano: Se $\underline{f}: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è continua in X e X è un insieme connesso, allora il codominio $\underline{f}(X)$ è un connesso di $\mathbb{R}^k$

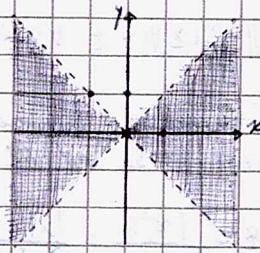
Esempi:
- le rette $R = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = \underline{x}_0 + t\underline{v}\}$ sono dei connessi: ad esempio, R può essere visto come il codominio della funzione $\underline{g} = t \in \mathbb{R} : \underline{x} + t\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ funzione continua in $\mathbb{R}$, insieme connesso.
- Analogamente per i segmenti: $h(t) = \underline{p}_1 + t(\underline{p}_2 - \underline{p}_1)$, $t \in [0,1]$; $S = \overline{P_1P_2} = h([0,1])$ certamente connesso.
- L'unione di connessi che si intersecano sono connessi $\Rightarrow$ le poligonali in $\mathbb{R}^n$ sono insiemi connessi
- $\underset{\substack{\text{fiss.} \\ (r>0)}}{\underline{p}}(t) = (r\cos t, r\sin t) \in \mathbb{R}^2$: Se $t \in \mathbb{R}$ è una circonferenza percorsa infinite volte, se ristretto ad un intervallo di ampiezza 2π è percorsa una volta: il codominio $\Gamma = \underline{p}([0, 2\pi[)$ è un connesso del piano ($\mathbb{R}^2$)

Teorema di Weierstrass: Se una funzione $\underline{f}: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è continua in X ed X è un compatto, allora il codominio della funzione $\underline{f}(X)$ è un compatto.

Teorema: Se $\underline{f}: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è invertibile e continua in X ed X è un compatto, allora $\underline{f}^{-1}$ è continua su $\underline{f}(X)$, ovvero la funzione inversa è continua nel codominio

Calcolo di Limiti di f scalari di due variabili reali

- $\lim_{(x,y)\to\vec{[0,1]}} \log(x^2+y^2)$ $\nexists$: $[0,1]$ non è di accumulazione! infatti: $X = \{(x,y) : x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) : |x| \geq |y|\}$

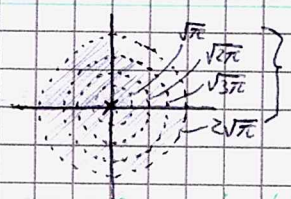


- $\lim_{(x,y)\to\vec{(1,0)}} \log(x^2+y^2) = 0$ f continua in $(1,0) \Rightarrow \lim \underline{f} = \underline{f}(1,0)$
  oppure: $(x,y) \to (1,0) \Rightarrow (x^2+y^2) \to 1 \Rightarrow \log^{(x^2+y^2)}(1) \to 0$
- $\lim_{(x,y)\to\vec{(-1,1)}} \log(x^2+y^2)$ $\begin{matrix} x^2 \to 1 \\ y^2 \to 1 \end{matrix} \Rightarrow x^2 - y^2 \to 0 \Rightarrow \lim \log(x^2-y^2) = -\infty$
  (Applicazione del limite di funzione composta)
  di frontiera $\Rightarrow$ non vale l'ipotesi di continuità

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{(x^2+y^2)^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)} = 1$$

$X = \{(x,y) : x^2+y \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$\to x^2+y^2 = t \Rightarrow t \to 0,\ t^2 \to 0,\ \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{\operatorname{sen} t^2} = 1$



Applicazione del Teorema sul limite della funzione composta sfruttando il limite $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{sen} y} = 1$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1/(x+y)$ $X = \{(x,y) : y \neq -x\}$

$\to \nexists$: i due semipiani tendono a $\pm\infty$:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y = 0$ ponendo $x+y = t$, $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}$ $\nexists$ ciò però non è una conferma per la composizione di x e y!

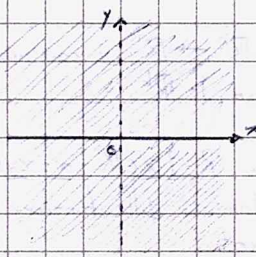
Avvicinandoci all'origine nel semipiano $(x+y) > 0$, il limite tende a $+\infty$
$(x+y) < 0$, il limite tende a $-\infty$ $\Big\} \to \nexists$

Teorema sul limite delle restrizioni (Le restrizioni hanno limite diverse)

riccardo.polidoro.org

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}$ forma indeterminata $\frac{0}{0}$, non applicabili operazioni sui limiti...

$$X = \{\mathbb{R}^2 - \underbrace{(0,y)}_{\neq 0}, y \in \mathbb{R}\}$$



Procediamo avvicinandoci al punto restringendo l'insieme (limite delle restrizioni) a delle rette:

asse x: $f(x,y) = \frac{y}{x}$, $f(x,0) = \frac{0}{x} \; \forall x \neq 0$

$\lim_{x\to 0} f(x,0) \; \frac{0}{x} = 0$

Per il ragionamento a fianco, il limite $\nexists$ poiché i limiti delle restrizioni sono diversi.

In generale, per una generica retta $y = kx$,

$$f(x,kx) = \frac{kx}{x} = k \; \forall k \neq 0 \Rightarrow \lim_{(x\to 0)} f(x,kx) = k \quad \forall k$$ ← risolve in un colpo: dipende da k

bisettrice: $f(x,x) = \frac{x}{x} = 1 \; \forall x \neq 0 \quad \lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$ stesso insieme di definizione

$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{x} = 0$ $\forall$ retta per l'origine, MA NON GLOBALMENTE: consideriamo $x = y^2$:

$$\lim_{y^2\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to 0} \frac{y^2}{x}$$

possiamo avvicinarci in qualunque modo al punto $\Rightarrow$ ATTENZIONE

- $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3}{x^2+y^2}$ forma ind. $\frac{0}{0}$, $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$f(x,0) = x \Rightarrow \lim_{x\to 0} x = 0$; $f(0,y) = 0 \; \forall y \neq 0$; $f(x,kx) = \frac{x^3}{x^2(1+k)} = 0 \; \forall x \neq 0$

Non si osservano possibili curve/restrizioni che aderino il limite $\Rightarrow$ Applichiamo la definizione di limite:

$$\exists \varepsilon > 0 : \|f(x)\| < \varepsilon \; \forall x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\}$$

$\Rightarrow$ basta trovare una funzione g del carattere infinitesimo con cui maggiorare f (Teorema di regolarità del confronto esteso ad $\mathbb{R}^2$) $\Rightarrow |f(x)| < g$ verifica.

$$0 \overset{\text{def}}{\leq} \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \; g = \frac{|x^3|}{x^2+y^2} = \frac{|x|\cdot x^2}{x^2+y^2} \leq |x| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

($|x|$ tende a 0; $\frac{x^2}{x^2+y^2} < 1$ per la disuguaglianza triangolare: $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2 \leq x^2+y^2$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow y^2 \leq x^2+y^2$)

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ $f(x,0) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \; \forall x \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim f(x,0) \Rightarrow \nexists \lim f(x,y)$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $f(x,0) = \frac{0}{|x|} = 0 \; \forall x \neq 0$

$f(0,y) = \frac{y}{|y|} \; y \neq 0 = \begin{cases} 1 \text{ se } y > 0 \\ -1 \text{ se } y < 0 \end{cases}$ $\lim_{y\to 0} \operatorname{sgn}(y) \; \nexists$

$f'(|x|) = \operatorname{sgn} x \; \forall x \neq 0$ (utile per non spezzare f)

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = 0$ $\quad f(x,kx) = \frac{kx^2}{\sqrt{x^2(1+k^2)}} = \frac{kx^2}{|x|\sqrt{1+k^2}} = \frac{k|x|}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,kx) = 0$

Applichiamo il teorema di regolarità del confronto:

$$0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

(disug. triangolare; $\sqrt{x^2+y^2}$ tende a 0) $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$

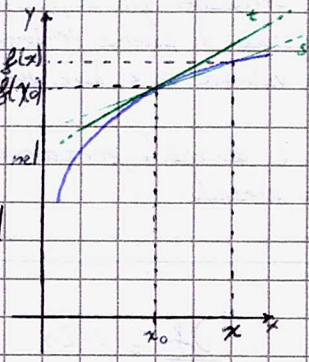
riccardo.polidoro.org

Basi sul Calcolo Differenziale

Richiamiamo dall'Analisi I il concetto di derivata:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$ equazione della retta tangente ad f nel punto x_0.

Tale espressione coincide con la migliore approssimazione di f intorno ad x_0 con un polinomio di I grado.



Derivabilità: La derivata ESISTE ED È FINITA; essa (la derivata) è suscettibile di rappresentazione geometrica come coefficiente angolare della retta tangente; si dimostra che il coefficiente angolare è pari alla derivata in x_0

Teorema

Sia $P(x)$ un polinomio di I grado tale che $P(x_0) = f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{x - x_0} = 0$, allora f è derivabile in x_0 e

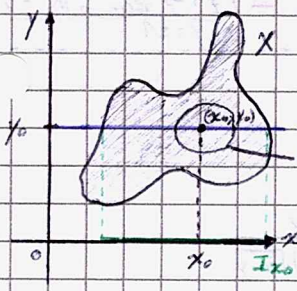
$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Derivate Parziali

~~Una f si dice derivabile parzialmente~~

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\underline{x_0} \in \mathring{X}$

~~$(x_0, f(x_0, y_0))$~~



Fissiamo $y = y_0 \Rightarrow f(x, y_0)$: è definita in un intorno di x_0, nella sola variabile x: si dice funzione parziale, ed è possibile valutarne la derivata:

$\exists\, I(x_0, y_0) \overset{\text{intero}}{\subseteq} X \Rightarrow \exists\, X \cap \{(x, y) : y = y_0\}$ sia un segmento

Se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, esso si dice derivata parziale nel punto (x_0, y_0) di f rispetto ad x, e si denota con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad f_x(x_0, y_0)$$

Analogamente, se $\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$,

f si dice derivata parziale nel punto (x_0, y_0) di f rispetto a y e si denota con $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$.

Sulla frontiera di X ciò può perdere di significato: se non si forma un segmento, il limite non ha senso: un punto non è idoneo alla derivabilità parziale rispetto ad x [y]; per questo motivo ci limiteremo (per ora) alle derivate parziali nei punti interni.

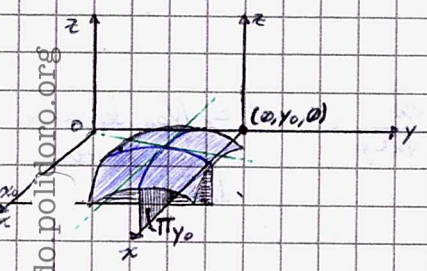
Da $\mathbb{R}^2$ possiamo estendere la derivata parziale ad $\mathbb{R}^n$: fissando $n-1$ variabili si ottiene la derivata parziale rispetto all'unica "variabile variabile":

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \underline{x_0} \in \mathring{X},\ i = 1, \dots, n, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, \overset{\text{varia}}{\overbrace{x_i}}, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(\underline{x_0})}{x_i - x_i^0}$$

Derivabilità

Una funzione si dice derivabile parzialmente in X se in X la f è derivabile e la derivata parziale rispetto ad x [y] esiste ed è finita $\forall (x, y) \in X$. (Analogamente per $n > 2$; il concetto si estende anche a funzioni vettoriali.

Interpretazione geometrica: Data una funzione in due variabili $z = f(x, y)$, con diagramma una superficie:



Si costruisce un nuovo riferimento cartesiano; il piano Π_{y_0} interseca il diagramma di f ottenendo il diagramma della funzione parziale in x con $y = y_0$; la $\partial f / \partial x$ corrisponde all'esistenza in Π_{y_0} della retta tangente al diagramma della funzione parziale in x, di cui la derivata parziale esprime il coefficiente angolare.

Analogo il ragionamento per y.

riccardo.poliloro.org

Calcolo: Si sfruttano gli strumenti già acquisiti per le derivate di funzioni reali in una variabile reale, sfruttando le regole di derivazione di somma, prodotto, rapporto, composizione di funzioni.
⚠ Bisogna prima valutare se e dove possono esserci problemi di derivabilità.

→ Se una funzione è derivabile parzialmente in tutti i punti di un sottoinsieme X, si può parlare di funzione derivata parziale.

Esercizi

- $f_1(x,y) = xy - x^2$ $\quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = y - 2x \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x$
- $f_2(x,y) = (x-y)^2 \log(x+y)$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2(x-y)\log(x+y) + \frac{(x-y)^2}{x+y}$; $\frac{\partial f_2}{\partial y} = -2(x-y)\log(x+y) + \frac{(x-y)^2}{x+y}$
- $f_3(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$; ⚠: $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$ Insieme aperto, certamente derivabili in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$
- $f_4(x,y) = e^{\left(\frac{x}{1-y^2}\right)}$ $\quad \frac{\partial f_4}{\partial x} = e^{\frac{x}{1-y^2}}\left(\frac{1}{1-y^2}\right) = \frac{e^{\frac{x}{1-y^2}}}{1-y^2}$; $\frac{\partial f_4}{\partial y} = e^{\frac{x}{1-y^2}} \cdot x\left(\frac{-2y}{(1-y^2)^2}\right) = -e^{\frac{x}{1-y^2}} \cdot \frac{2xy}{(1-y^2)^2}$; ⚠ $y^2 \neq 1 \Rightarrow$ deriv. in $\mathbb{R}^2$ - rette ($y = \pm 1$)
- $f_5(x,y) = \arctg(x + \log y)$ $\quad \frac{\partial f_5}{\partial x} = \frac{1}{1+(x+\log y)^2}$; $\frac{\partial f_5}{\partial y} = \frac{1}{1+(x+\log y)^2} \cdot \frac{1}{y}$
- $f_6(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}$ $\quad \frac{\partial f_6}{\partial x} = \frac{\sqrt{x+y} - (x-y)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}{x+y} = \frac{2x+2y-x+y}{2(x+y)\sqrt{x+y}} = \frac{x+3y}{2(x+y)\sqrt{x+y}}$

  $X: x+y \geq 0$

  $\frac{\partial f_6}{\partial y} = \frac{-\sqrt{x+y} + \frac{y}{2\sqrt{x+y}}}{x+y} = \frac{-2x-y}{(x+y)\sqrt{x+y}}$

⚠ Tutte le derivate parziali sono definite in INSIEMI APERTI

Derivate parziali nei punti di frontiera

Se in un opportuno intorno di $\underline{x_0} \in \partial X$ ci sono punti interni ad X ($\underline{x_0} \in \partial X \cap X$, X è una regione), ovvero se $\underline{x_0}$ è di accumulazione per i punti interni ad X, e se in detto intorno $I_{\underline{x_0}}$ cadono punti di $\mathring{X}$ in cui f è derivabile parzialmente rispetto ad x_i e se esiste ed è finito il limite:

$$\lim_{\substack{\underline{x} \to \underline{x_0} \\ \underline{x} \in I_{\underline{x_0}} \cap \mathring{X}}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = l$$

Allora f si dice derivabile parzialmente in $\underline{x_0}$ e porremo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x_0}) = l$, definendo la derivata parziale "per continuità"

Esempi

$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$ $\quad X = \{(x,y) : y \leq x^2\}$ ins. chiuso, derivabile parzialmente nei punti interni.

$(x,y) \in \mathring{X}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2-y}}$

In un punto di frontiera, di coordinate $(\bar{x}, \bar{x}^2)$:

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{x}^2)} \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}) = \lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{x}^2)} -\frac{1}{2\sqrt{x^2-y}} = -\infty \; ; \quad \lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{x}^2)} \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}) = \lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{x}^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2-y}} = +\infty \; ? \Rightarrow$$ Non derivabile in alcun punto di ∂X

riccardo.polidoro.org

Prolungamento per Continuità di Funzioni

$\frac{xy}{x^2-y^2}$ La funzione è definita in $\mathbb{R}^2$ meno le bisettrici, in cui $|x|=|y|$; vediamo se nei punti ∂X della frontiera la funzione è **prolungabile per continuità**, ovvero se esiste ed è finito:

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{x})} \frac{xy}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{x})} \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^2-\bar{x}^2} = \pm\infty \Rightarrow \nexists$$

analogamente $\forall x \neq 0$

($(\bar{x},\bar{x})$: punto di ∂X; supponiamo $\bar{x}>0$)

0^+ se $|y|<|x|$

0^- se $|y|>|x|$

NON PROLUNGABILE in ∂X

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy}{x^2-y^2}$$ Consideriamo $y=kx$ rette per l'origine $\lim_{(x,kx)\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1-k^2)} = \frac{k}{1-k^2}$ varia in k $(k\neq\pm 1)$ $\Rightarrow \nexists$

$f: \frac{e^{xy}-1}{x}$ $\qquad \partial X = \{(x,y) : x=0\}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ (lim. notevole)

$$\lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{e^{xy}-1}{xy}\cdot y = \lim_{(x,y)\to(0,\bar{y})} \frac{e^{xy}-1}{xy}\cdot \bar{y}$$

esiste ed è finito $\Rightarrow$ prolungabile per continuità.

Derivabilità nei Punti di Frontiera

- Consideriamo la funzione $f(x,y)=\sqrt{x^2-y}$, già caratterizzata alla pagina precedente:

$$f_y = -\frac{1}{2\sqrt{x^2-y}} \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to P\in\partial X \\ (x,x^2)}} f_y \simeq -\frac{1}{0} = -\infty$$

Non derivabile parzialmente in y sulla frontiera

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}},\ x\neq 0 \begin{cases} x>0,\ f_x\to+\infty \\ x<0,\ f_x\to-\infty \end{cases}$$

Non derivabile parzialmente rispetto a x sulla frontiera

Valutiamo ora la derivabilità nell'origine di f_x:

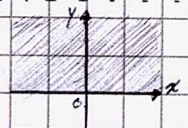
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}$$

Primo passo nel calcolo dei limiti nell'origine: valutare che succede lungo gli assi

asse $x \subseteq X \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f_x(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x \ \nexists$

Di conseguenza, $f(x,y)=\sqrt{x^2-y}$ non è derivabile in alcun punto della frontiera.

- $g(x,y) = yx^2\sqrt{y}$ $\qquad X = \{(x,y) : y\geq 0\}$



$y>0 \Rightarrow (x,y)\in \mathring{X}$, in cui g è derivabile parzialmente rispetto a x ed y:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xy\sqrt{y} \ ; \ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2\sqrt{y} + \frac{yx^2}{2\sqrt{y}} = x^2\left(\frac{3y}{2\sqrt{y}}\right) = \frac{3}{2}x^2\sqrt{y}$$

Valutiamo la derivabilità nei punti di frontiera:

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},0)} \begin{cases} g_x(x,y)=0 \\ g_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow$$ La funzione è derivabile parzialmente sia in x che in y e ha derivata parziale nulla sia rispetto a x che rispetto a y.

riccardo.polidoro.org

Dagli esempi prodotti alla pagina precedente si osserva che per valutare la derivabilità parziale di una funzione è necessario:

- Calcolare l'insieme di definizione X e valutarne la natura:
  - Se X è un aperto e la funzione è derivabile (le funzioni coinvolte sono derivabili) in tutto X, è essa è certamente derivabile parzialmente in tutto l'insieme di definizione.
  - Se X è chiuso e la funzione è derivabile (le funzioni coinvolte sono derivabili) in tutto X, occorre valutare la derivabilità nei punti di frontiera ∂X

⚠ Non è detto che se f è definita in un aperto le funzioni coinvolte nella composizione siano derivabili in tutto X

Esempio:

$$h(x,y)=\sqrt{|xy|} \qquad X=\mathbb{R}^2;\ \forall (x,y): xy\neq 0 \ \ h \text{ è derivabile in } x,y \text{ e:}$$

$$h_x(x,y)=\frac{|y|\operatorname{sgn}x}{2\sqrt{|xy|}}=\underset{\uparrow}{\pm}\frac{|y|}{2\sqrt{|xy|}} \qquad x\gtrless 0$$

e, dualmente, $h_y(x,y)=\dfrac{|x|\operatorname{sgn}y}{2\sqrt{|xy|}}=\underset{\uparrow}{\pm}\dfrac{|x|}{2\sqrt{|xy|}}$ $\quad y\gtrless 0$ $\quad x$

$\Rightarrow$ Le derivate parziali non sono continue nell'insieme di definizione: ∃ per parte, ∄ ∞ ma non sono lim. del parte.

Si osserva che la derivabilità parziale non è garantita negli assi: tentiamo di valutarla applicando la definizione di derivata parziale: fissando un punto:

rispetto all'asse x:

$$\left[\frac{h(x,0)-h(\bar{x},0)}{x-\bar{x}}=\frac{0}{x-\bar{x}}=0 \ \ \forall x\neq\bar{x}\right] \Rightarrow \lim_{x\to\bar{x}}\frac{h(x,0)-h(\bar{x},0)}{x-\bar{x}}=0$$

rispetto all'asse y:

$$\left[\frac{h(\bar{x},y)-h(\bar{x},0)}{y}=\frac{\sqrt{|\bar{x}|\,|y|}}{y}=\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sgn}y\sqrt{|y|}}=\pm\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{|y|}}\right] \quad y\to 0^{\pm}; \ \lim=\pm\infty$$

La funzione non è derivabile parzialmente rispetto a y in questi punti.

La funzione h è derivabile rispetto ad x in tutti i punti dell'asse x; non è derivabile rispetto ad y nei punti $(\bar{x},0)\ \forall \bar{x}\neq 0$.

Ciò avviene "simmetricamente" sull'asse y, in cui si verifica la derivabilità rispetto ad y ma non rispetto ad x.

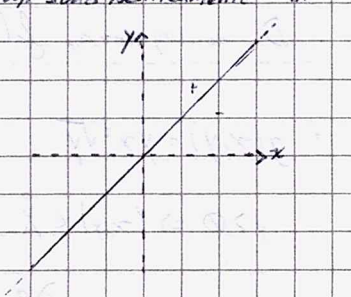
Infatti, la funzione è identicamente nulla sugli assi: derivando sull'asse x rispetto a y (ci muoviamo parallelamente all'asse y) si trasporta l'anomalia della funzione radice.

Poiché h è identicamente nulla sugli assi, sapendo che nell'origine la funzione è derivabile sia rispetto ad x che rispetto a y,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)=0$$

Perché i rapporti incrementali sono identicamente nulli lungo gli assi.

Considerando $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial h/\partial y$, si osserva che esso NON ESISTE: $\pm\dfrac{|x|}{2\sqrt{|xy|}}=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{|x|}{|y|}}$ $\quad y\gtrless 0$



Osservazione: La funzione è derivabile nell'origine, le derivate parziali invece non sono continue nell'origine: esistono, sono entrambe nulle MA non coincidono coi limiti delle derivate parziali!

Se f è derivabile parzialmente rispetto a $x_i\ \forall i=1,\dots,n$, in un aperto X di $\mathbb{R}^n$ e le derivate parziali sono funzioni continue in tutto X, f si dice di classe $C^1(X)$ (classe C^1 dell'aperto X)

Ad esempio, la funzione appena analizzata $h(x,y)=\sqrt{|xy|}$ è una funzione di classe $C^1(Y)$, con $Y=\{(x,y): xy\neq 0\}=\overset{\circ}{X}$

riccardo.polidoro.org

Se una funzione è di classe $C^1(\overset{\circ}{X})$ e dunque le derivate parziali sono continue in tutti i punti dell'interno, e le definiamo per continuità nei punti della frontiera, allora la funzione avrà derivate parziali continue in tutta la regione.

In altre parole, se X è una regione e f è derivabile parzialmente rispetto a tutte le variabili $\forall x_i$ in tutti i punti di X (incluso quelli di ∂X, definite per continuità) e le derivate parziali sono continue nell'interno di X, allora saranno continue anche nei punti della frontiera $\Rightarrow$ f si dice di classe $C^1_*(X)$

$$\boxed{f \in C^1(X)}$$

Gradiente di una funzione

(Se f è derivabile parzialmente rispetto a $x_1, \dots, x_n$ in X e le derivate parziali sono continue in $\overset{\circ}{X}$, allora saranno continue anche in ∂X.) → se X è una regione, vale anche in ∂X

Se f è derivabile parzialmente rispetto a $x_i \ \forall i = 1, \dots, n$ nel punto $\underline{x_0} \in \overset{\circ}{X}$, il vettore avente per componenti le derivate parziali della funzione rispetto alle variabili x_i calcolate nel punto x_0 si dice vettore gradiente di f nel punto $\underline{x_0}$, denotato con:

$$\nabla f(\underline{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_0}) \right)$$

"nabla"

Nel caso in cui la funzione f è derivabile parzialmente in tutto un aperto, allora è possibile costruire il vettore gradiente in ogni punto, e risulta possibile costruire una funzione vettoriale definita in $\mathbb{R}^n$ e a valori in $\mathbb{R}^n$, dunque un campo vettoriale:

$$\nabla f : \underline{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n \to \nabla f(\underline{x}) \in \mathbb{R}^n$$

campo gradiente di f in X

Logicamente, se X è una regione, si può definire il campo gradiente anche sui punti della frontiera in quei punti in cui la funzione è derivabile parzialmente rispetto a tutte le variabili: si può parlare di campo vettoriale gradiente anche sui punti della frontiera.

Esempio: Considerando la funzione h, derivabili in tutti i punti diversi dagli assi + l'origine

$$\nabla h : \{(x,y) : xy \neq 0\} \cup \{(0,0)\} \to \nabla h(x,y)$$

Ricordando che una funzione vettoriale è continua quando le sue componenti sono continue, dato che in questo caso le derivate parziali non sono continue nell'origine si ha che il campo gradiente non è un campo continuo in $(0,0)$.

Esercizi

Determinare i gradienti delle seguenti funzioni nel punto $(-2,1)$:

- $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$ $\quad \nabla f(-2,1) = ?$

$(-2,1) \in \overset{\circ}{X} \Rightarrow f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}$; $f_y = -\frac{1}{2\sqrt{x^2-y}}$

$$\nabla f(-2,1) = f_x(-2,1)\,\underline{i} + f_y(-2,1)\,\underline{j} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,\underline{i} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\underline{j} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\underline{i} + \frac{1}{2}\underline{j}\right)$$

- $g(x,y) = \frac{x}{x^2-y^2} \arctan y \arcsin x$

$$X: \begin{cases} x^2 \neq y^2 \Rightarrow |x| \neq |y| \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, \ x^2 - y^2 \neq 0\}$$

g è derivabile in tutti i punti interni ad X (unico problema nella derivabilità è $\arcsin x$ nei punti $x = \pm 1$):

$$g_x = \frac{x^2 - y^2 - 2x^2}{(x^2-y^2)^2} \arctan y + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \ ; \ g_y(x,y) = \frac{+2xy}{(x^2-y^2)^2} \arctan y \arcsin x$$

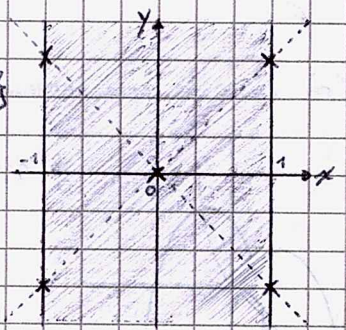
$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

I punti della frontiera appartenenti ad X sono derivabili parzialmente rispetto a y e non rispetto a x.

⚠ Non ha senso calcolare la derivabilità dove la funzione non è definita!

- $g(x,y) = y x^2 \sqrt{y}$
- $h(x,y) = \sqrt{xy}$

DA FARE



né aperto né chiuso, non connesso, è una regione, non è limitato

Non connesso perché non intern. connesso perché non intern. connesso per poligonali

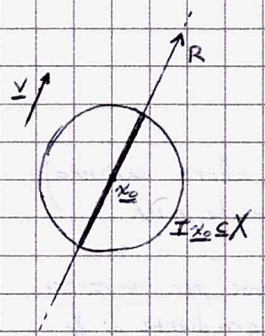
riccardo.polidoro.org

Si può dire che g è certamente di classe C nei punti interni all'insieme di definizione: $g \in C(\dot{X})$

Calcoliamo $\nabla g\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\underline{i}, \frac{\pi}{6}\underline{j}$ $\qquad \dot{X} = \{(x,y) : -1 < x < 1 \vee x^2 - y^2 \neq 0\}$

Derivate Direzionali

Ciò che è stato fatto rispetto alle direzioni degli assi si può applicare su direzioni qualsiasi:



$\underline{x_0} \in \dot{X}$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq 0$, $\|\underline{v}\| = 1$ vettore direzione ; $\exists\, I_{\underline{x_0}} \subseteq X$

$$R_0 = \{\underline{x_0} + t\underline{v}, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Si osserva che $R_0 \cap I_{x_0}$ è composta da punti corrispondenti a parametri $t \in]-\delta, \delta[$:

$$R_0 \cap I_{x_0} = \{\underline{x_0} + t\underline{v}, t \in]-\delta, \delta[\}$$

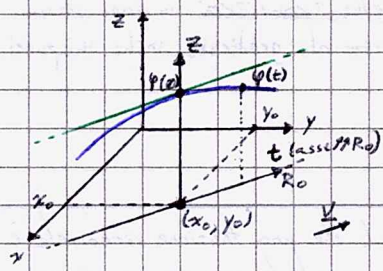
$0 \in]-\delta, \delta[\Rightarrow$ ha senso porsi il problema dell'esistenza del limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{t \to 0^{\pm}} \frac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t}$$

Limite del rapporto incrementale di una funzione nella sola variabile t nel punto $t = 0$; se esiste ed è finito, f si dice **derivabile nel punto $\underline{x_0}$ secondo la direzione $\underline{v}$** *e il limite suddetto si dice* **derivata direzionale** di f in $\underline{x_0}$, denotata con $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0})$

Osservazione: Le derivate parziali sono particolari derivate direzionali: se $\underline{v} = \underline{e_i}$, $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{e_i}}(\underline{x_0})$

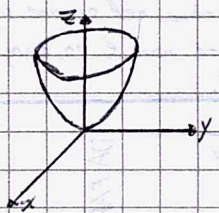
L'interpretazione geometrica delle derivate direzionali è del tutto analoga a quella fatta per le derivate parziali:



$$\varphi(t) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$$

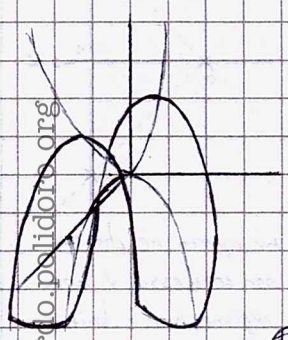
$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

Esempi



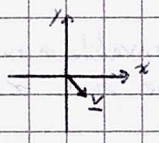
A seconda della scelta della direzione si possono avere delle direzioni in cui la funzione "sale" o "scende"; ciò è utile per lo studio delle funzioni, in particolare per le applicazioni nello studio di massimi e minimi.

Osservazione: Se una funzione è derivabile parzialmente in un punto, restringendo la funzione alla retta passante per il punto e parallela ad uno degli assi coordinati, detta restrizione è certamente continua in quella variabile, poiché ogni funzione derivabile in un intervallo è continua in detto intervallo: in particolare, la derivabilità direzionale assicura che la restrizione della funzione alla retta orientata è certamente continua nel punto considerato.
Variando le direzioni, si ottengono curve diverse passanti per lo stesso punto; se è derivabilità esiste la retta tangente; dette rette non sono necessariamente complanari.



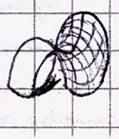
$f(x,y) = x^2 - y^2$ paraboloide a sella

Valutiamo nel punto $(0,-1)$ $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}$, con $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,-1) = \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0,1)}{t} = \frac{\frac{t^2}{2} - \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}{t} = \frac{-1 - \frac{2t}{\sqrt{2}}}{t} = \frac{-1 - \sqrt{2}t}{t} = -\sqrt{2} \quad (t \neq 0)$$

Ne segue che $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,-1) = -\sqrt{2}$



riccardo.polidoro.org

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lungo gli assi la funzione è certamente nulla; valutiamo la derivabilità nell'origine lungo una qualsiasi direzione.

$\underline{v} = (v_1, v_2)$, poniamo $v_2 \neq 0$ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ certamente, idem per $\partial f/\partial y\right)$

$$\frac{f(0+t\underline{v}) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} \overset{(t\neq 0)}{=} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t(t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2)} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} \quad \not\exists$$

MA $\not\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f$!

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}$$

Calcolato in qualunque direzione, è logicamente un numero finito $\Rightarrow$ la funzione è derivabile lungo tutte le direzioni nell'origine $\Rightarrow$ è continua lungo tutte le direzioni: la restrizione della funzione a ogni retta passante per l'origine ~~NON~~ è una funzione continua.

La funzione però NON È CONTINUA nell'origine: sostituendo a $y = x^2$, la funzione non tende al valore assunto dalla funzione nell'origine ($\lim_{(x,x)\to(0,0)} f = 1/2 \neq 0$) e non esiste il limite della funzione per $(x,y)\to(0,0)$

Pur essendo continua lungo tutte le direzioni, la funzione non è continua globalmente.

Differenziale di una Funzione

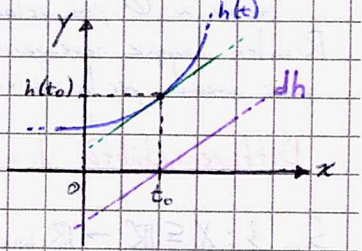
Data una funzione h in una variabile, definita in un intervallo

$$h: I \to \mathbb{R} \qquad t_0 \in I \text{ in cui } h \text{ è derivabile}$$

Si definisce **differenziale della funzione h relativo al punto t_0** una funzione letteralmente lineare che ad ogni numero reale t associa la derivata di h nel punto t_0 per $(t - t_0)$:

$$dh(t_0): t \in \mathbb{R} \to h'(t_0)\cdot \underbrace{(t - t_0)}_{\Delta t}$$

$$\hookrightarrow dh = h'(t)\,dt, \quad \Delta h = h(t) - h(t_0)$$



~~$h'(t_0)$~~ **Osservazione:** $\dfrac{\Delta h - dh}{\Delta t}$ è uguale al rapporto incrementale della funzione $h - h'(t_0)$, dunque:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta h - dh}{\Delta t} = 0$$

La differenza tra l'incremento della funzione e il differenziale è un infinitesimo di ordine superiore a Δt (ordine maggiore di 1): ciò implica che la funzione che ha per grafico la retta in verde è la migliore approssimazione con un polinomio di primo grado della funzione h in un intorno del punto $(t_0, h(t_0))$: la differenza tra le ordinate dei punti del diagramma di h e quelle dei punti della retta tende a 0 più velocemente di quanto t tenda a t_0.

Questa proprietà osservata verrà utilizzata spesso nello studio di funzioni in più variabili: la derivabilità parziale o direzionale non fornisce indicazioni sulla continuità globale della funzione: non ragionano globalmente intorno al punto.

Analogamente a quanto visto in $\mathbb{R}$, estendiamo il concetto di differenziale alle funzioni in $\mathbb{R}^n$: attraverso una serie di valutazioni successive riusciremo a sfruttare questo oggetto per definire le proprietà delle funzioni viste in $\mathbb{R}$ anche in $\mathbb{R}^n$: tra queste figura, ad esempio, la continuità.

riccardo.polidoro.org

Differenziale in $\mathbb{R}^n$

Sia $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$ e f una funzione derivabile parzialmente rispetto a tutte le variabili $x_1, \dots, x_n$. La funzione:

$$df(\underline{x}_0): \underline{x} \in \mathbb{R}^n \to \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) \in \mathbb{R}$$

(prodotto scalare; $\underline{x} - \underline{x}_0$: vettore differenza)

differenziale di f in $\underline{x}_0$, è una funzione affine.

⚠ È una funzione SCALARE.

Osservazione: $df(\underline{x}_0)(\underline{x}) = f_{x_1}(x_0)(x_1 - x_1^\circ) + \dots + f_{x_n}(x_n - x_n^\circ) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\underline{x}_0) \cdot (x_i - x_i^\circ)$

Denotando con $dx_1, \dots, dx_n$ gli incrementi $x_1 - x_0^\circ, \dots, x_n - x_n^\circ$ possiamo scrivere:

$$df(\underline{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\,dx_n = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot d\underline{x}$$

Si ha interpretazione geometrica solo in $\mathbb{R}^2$ (implica che il diagramma è a 3 dimensioni): la funzione, polinomio di primo grado, ha come diagramma un piano $\left(z = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)\right)$ che contiene il punto $(\underbrace{x_0, y_0}_{\underline{x}_0}, 0)$

Ricordando il teorema del differenziale in $\mathbb{R}$, che afferma che se $h: t \in I \subseteq \mathbb{R} \to h(t) \in \mathbb{R}$ è derivabile in $t_0 \in I$ allora la differenza tra l'incremento Δh e il differenziale dh è un infinitesimo in t_0 di ordine maggiore di 1, ovvero di ordine maggiore dell'incremento Δt, si osserva che esso non è generalmente valido.

Esempio: Infatti, la funzione $f(x,y)$ analizzata alla pagina precedente come esempio, certamente derivabile nell'origine in quanto le derivate parziali sono identicamente nulle ~~all'origine~~ lungo gli assi, non è continua nell'origine e dunque non è possibile affermare che la differenza sia un infinitesimo di ordine maggiore di uno.

Analogamente, anche se la f fosse continua il teorema non fornisce strumenti che assicurino che detta differenza tenda a 0 più velocemente di quanto x tenda a x_0.

Risulta dunque necessario introdurre una nuova proprietà che definisce in $\mathbb{R}^n$ le proprietà viste per le funzioni in $\mathbb{R}$; come accade per la derivabilità:

Differenziabilità di una funzione in un punto $\underline{x}_0$

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione scalare e sia $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$. f si dice **differenziabile** in $\underline{x}_0$ se:

- f è derivabile parzialmente in $\underline{x}_0$ rispetto a x_i $\forall i = 1, \dots, n$ (conseguenza della seconda condizione; si noti che questa condizione permette di considerare il differenziale di f nel punto $\underline{x}_0$)
- $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{\overbrace{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)}^{\Delta f} - \overbrace{\nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)}^{df}}{\| \underline{x} - \underline{x}_0 \|} = 0$

la differenza tra incremento e differenziale della funzione è un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla distanza di $\underline{x}$ da $\underline{x}_0$.

Questa seconda condizione, coincidente con ciò che non era garantito precedentemente, può anche essere letta come la migliore approssimazione della funzione con una funzione affine (polinomio di I grado, funzione analoga a quella che in $\mathbb{R}$ restituiva la retta tangente in un punto del grafico della funzione).

Se denotiamo con $p(\underline{x})$ la funzione affine $p: \underline{x} \in \mathbb{R}^n \to f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$, possiamo dire che la differenza $f(\underline{x}) - p(\underline{x})$ è un infinitesimo in $\underline{x}_0$ di ordine maggiore rispetto a $\| \underline{x} - \underline{x}_0 \|$, ovvero:

$$\forall \underline{x} \in X,\ f(\underline{x}) - p(\underline{x}) = o(\| \underline{x} - \underline{x}_0 \|)$$

A sua volta, se denotiamo con $r(\underline{x})$ l'infinitesimo $o(\| \underline{x} - \underline{x}_0 \|)$, avremo che:

$$\forall \underline{x} \in X,\ f(\underline{x}) = p(\underline{x}) + r(\underline{x})$$

simile alla formula di Taylor con resto di Peano...

riccardo.poldoro.org

Cond. NECESSARIA $\Rightarrow$

Attraverso la differenziabilità è possibile ragionare globalmente: una funzione differenziabile in $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$ è continua in $\underline{x}_0$.

Teorema: Se f è differenziabile in $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$, allora f è continua in $\underline{x}_0$.

Dim

Poiché f è differenziabile in $\underline{x}_0$, si ha che $\forall \underline{x} \in X$, $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + r(\underline{x})$ (con $r(\underline{x})$ infinitesimo in $\underline{x}_0$ di ordine maggiore rispetto a $\|\underline{x} - \underline{x}_0\|$).

Essendo $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + r(\underline{x}) = 0$ (tende a 0; $r(\underline{x})$ infinitesimo; lim prodotto scalare = prod. sc. limiti), avremo necessariamente che $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x})$ esiste ed è uguale a $f(\underline{x}_0)$, poiché l'incremento della funzione tende a 0.

⚠: Non si può studiare il limite al primo membro $\Rightarrow$ lo valutiamo al secondo

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) \Rightarrow f \text{ è continua} \quad \boxed{\text{QED}}$$

Teorema: Se f è differenziabile in $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$, allora f è derivabile secondo ogni direzione $\underline{v}$ e:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$$

formula del gradiente

Rende semplice il calcolo delle derivate direzionali!!

Dim

Poiché f è differenziabile in $\underline{x}_0$, si ha che $f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)(\underline{x}_0 + t\underline{v}) + r(\underline{x}_0 + t\underline{v})$ per definizione. ($\underline{x} - \underline{x}_0 = t\underline{v}$)

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x}_0 + t\underline{v} - \underline{x}_0) + r(\underline{x}_0 + t\underline{v}) = t \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} + r(\underline{x}_0 + t\underline{v}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

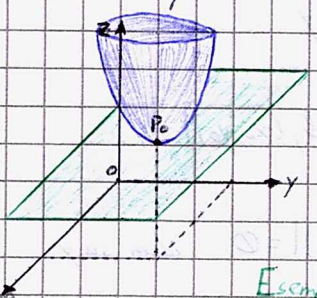
Osservando che $\|\underline{x}_0 + t\underline{v} - \underline{x}_0\| = |t| \, \|\underline{v}\| = |t|$ ($\underline{v}$ è un versore!) ed essendo $r(\underline{x})$ un infinitesimo di ordine maggiore di $\|\underline{x} - \underline{x}_0\|$, si ha che:

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(\underline{x}_0 + t\underline{v})}{t} = 0 \; ; \quad \lim_{t \to 0} \frac{t \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}}{t} = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} \quad \text{e, dunque:}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} \qquad \square$$

Condizione NECESSARIA per la differenziabilità in un punto (per semplicità ragioniamo in $\mathbb{R}^2$)

Se f è differenziabile in ~~$\underline{x}_0 \in \mathring{X}$~~ $(x_0, y_0) \in \mathring{X} \subseteq \mathbb{R}^2$, allora il piano di equazione $z = p(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ si dice **piano tangente** al diagramma G_f di f nel punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Essendo f differenziabili, la differenza tra le quote del diagramma e quelle del piano tende a 0 più velocemente di quanto (x,y) tenda a (x_0, y_0).

Se f è differenziabile in $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$, allora G_f è dotato in P_0 di un piano tangente.

Esempio

La funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$ è differenziabile in $(0,0)$ in quanto $df(0,0) = 0$, $f(0,0) = 0$ e $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. Il piano tangente ha equazione $z = 0$.

Se però provassimo a vedere se f è differenziabile in $(1,1)$ avremo, però, un limite molto più complesso da calcolare.

È importante allora definire una condizione sufficiente per la differenziabilità che sia di più facile verifica.

riccardo.policoro.org

Teorema Se $f: X \to \mathbb{R}$ è derivabile parzialmente in un intorno I_{x_0} (con $x_0 \in \mathring{X}$) rispetto a tutte le variabili $x_1, \dots, x_n$ e se le derivate parziali sono tutte continue in x_0, allora f è differenziabile in x_0.

Osservazioni:

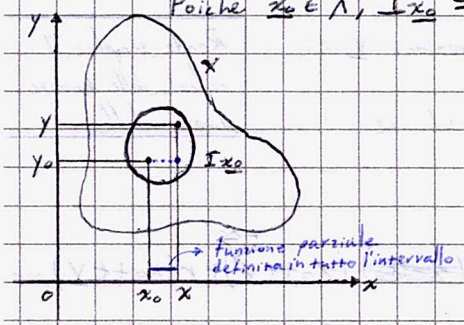
- Le definizioni di derivabilità secondo una direzione, differenziabilità, differenziale in un punto interno a X si estendono ai punti di ∂X, se X è una regione, insieme a tutti i risultati precedenti.
- Quindi, se X è una regione e f è di classe $C^1(X)$, allora f è differenziabile in X e, di conseguenza, continua in X e derivabile secondo ogni direzione in X

Dim

Consideriamo per semplicità $n=2$.

Th: $\lim_{(x,y)\to x_0} \dfrac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$

Poiché $x_0 \in \mathring{X}$, $I_{x_0} \subseteq X$.



Si intuisce che la dimostrazione del limite avverrà tramite una maggiorazione con una funzione tendente a 0; il trucco è scrivere l'incremento come somma di funzioni nella sola variabile x e y:

Consideriamo il punto (x, y_0), allora:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \underbrace{f(x,y) - f(x,y_0)}_{\text{fissato}} + \underbrace{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}_{\text{fissato}}$$

Applicando il **Teorema di Lagrange** (f continua e derivabile in $[a,b] \Rightarrow \exists c \in \underbrace{(a,b)}_{\text{interno}}: f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$) alla funzione parziale $f(\cdot, y_0)$ in $I_{(x,x_0)}$ ("non so quale dei due è il più grande") osserviamo che esiste un punto c_x compreso strettamente tra x ed x_0 tale che $f(x,y_0) - f(x_0,y_0) = f_x(c_x, y_0)(x-x_0)$

Analogamente, $\exists\, d_{xy}: f(x,y) - f(x,y_0) = f_y(x, d_{xy})(y-y_0)$ (variabile y, $f(x,\cdot)$)

Dunque, $\dfrac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \dfrac{[f_x(c_x,y_0) - f_x(x_0,y_0)](x-x_0) + [f_y(x,d_{xy}) - f(x_0,y_0)](y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \overset{(\le)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \frac{|[f_x(c_x,y_0) - f_x(x_0,y_0)](x-x_0) + [f_y(x,d_{xy}) - f(x_0,y_0)](y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}} \le \frac{|[f_x(c_x,y_0) - f_x(x_0,y_0)]| \cdot |x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + \frac{|f_y(x,d_{xy}) - f(x_0,y_0)| \cdot |y-y_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

Osservazione: $\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \le 1$ (disuguaglianza triangolare); analogamente per y

Possiamo dunque maggiorare la relazione con $|f_x(c_x,y_0) - f_x(x_0,y_0)| + |f_y(x,d_{xy}) - f_y(x_0,y_0)|$

Sfruttiamo ORA l'ipotesi di continuità: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ continua $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f_x(c_x,y_0) - f_x(x_0,y_0)| = 0$ idem su y

Dunque, $0 \le \left| \dfrac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \right| \le 0$

riccardo.polidoro.org

Osservazione Dalla condizione NECESSARIA per la differenziabilità di una funzione, si osserva che:

Se f è differenziabile in $\underline{x}_0$, allora $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$.

In particolare, $|\nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}| \leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\| (\cdot \|\underline{v}\| = 1) \Rightarrow -\|\nabla f(\underline{x}_0)\| \leq \left|\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{v}}\right| \leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\|$

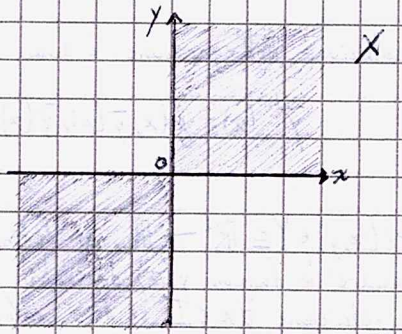
(disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)

Sappiamo dunque dove varia la derivata direzionale e il valore, dipendente dall'angolo formato tra $\underline{v}$ e ∇f in $\underline{x}_0$: è massimo se ci muoviamo su una direzione equiversa al gradiente ($\underline{v} \nparallel \nabla f$) e minima se ci muoviamo nel verso opposto. In particolare, in base al segno sappiamo se ci muoviamo su una direzione di salita/discesa.

Se X è una regione in cui sono definibili le derivate direzionali sulla frontiera, si può ripetere quanto detto riferendoci alle derivate parziali definite per continuità $\Rightarrow$ se f è di classe $C^1(\partial X)$ (sulla regione), f è differenziabile in ∂X e derivabile in ogni direzione.

Esercizi

- $f(x,y) = \sqrt{xy}$ definita e continua in $X = \{(x,y) : xy \geq 0\}$



certamente derivabile parzialmente in $\mathring{X}$ è:

$$f_x = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \quad ; \quad f_y = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

Essendo dotate di espressione elementare, le derivate parziali sono certamente continue in $\mathring{X} \Rightarrow f(x,y) \in C^1(\mathring{X}) \Rightarrow$ è differenziabile in $\mathring{X}$.

Valutiamo la derivabilità (e differenziabilità) sulla frontiera: fissiamo il punto $(\bar{x}, 0) \in$ asse x

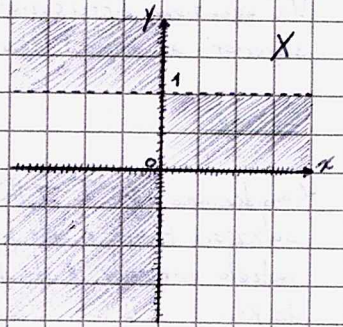
$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},0)} f_x = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(\bar{x},0)} f_y \nexists$$

Nell'origine, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x = f_y \nexists$

Analogamente per l'asse y: $\lim f_x \nexists$, $\lim f_y = 0$

Poiché la funzione non è derivabile parzialmente in alcun punto della frontiera rispetto a entrambe le variabili, f non è differenziabile in ∂X.

- $\log(xy - xy^2)$ $\qquad X: xy(1-y) > 0$



$f(x,y)$ è di classe C^1 in X (insieme aperto)

$$f_x = \frac{y - y^3}{xy - xy^2} \qquad f_y = \frac{x - 2xy}{xy - xy^2}$$ continue in X

$= -2\log 2 = -\log 4$

Calcoliamo l'equazione del piano tangente al diagramma in $(1, 1/2, \log 1/4)$

$$z = -2\log 2 + \frac{1/4}{1/4}(x-1) + 0 = x - (2\log 2 + 1)$$

$f_x(x - x_0) + f_y(\ldots)$ ($=0$)

E calcoliamo $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1, 1/2)$ con $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $\quad \nabla f(1, 1/2) \cdot \underline{v} = 1/\sqrt{2}$

riccardo.polidoro.org

Equazioni Differenziali

Studieremo principalmente le equazioni differenziali ordinarie, applicate in moltissimi ambiti: fisica, economia, biologia e ambiti anche umanistici, come la giurisprudenza.
Come intuibile dal nome, prendono in esame non numeri ma funzioni: si cercano funzioni in una variabile (eq. ordinarie) che soddisfano dei legami insieme alle loro derivate.
Si dice equazione differenziale del I ordine un'equazione che ha per oggetto funzioni derivabili almeno una volta e che soddisfano dei legami con f stessa e la variabile x. Analogamente, un'equazione differenziale di ordine k presenta legami tra una funzione e le sue derivate fino all'ordine k.

Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, e $f: Y \to \mathbb{R}$ una funzione reale di $n+1$ variabili reali. Il problema che prende in esame le funzioni $y(x)$ definite in un intervallo I di $\mathbb{R}$, ivi derivabili n volte e tali che:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in I$$

Si chiama **equazione differenziale di ordine n** e si denota con $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Una soluzione dell'equazione è una funzione $\bar{y}$ definita in I, derivabile n volte in I e tale che:

$$\bar{y}^{(n)}(x) = f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n-1)}(x)) \text{ in } I.$$

Se $f: (x,y) \in Y \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si definisce equazione differenziale del **primo ordine** l'equazione $y' = f(x,y)$: si vogliono individuare le funzioni $y(x)$ derivabili in un intervallo di $\mathbb{R}$ e tali che $y'(x) = f(x, y(x))$; una funzione $\bar{y}(x)$ che soddisfa questa relazione $\forall x \in I$ si dice soluzione (o **integrale**) dell'equazione differenziale; il suo diagramma si dice una **curva integrale**.
Analogamente, un'equazione differenziale del **secondo ordine** presenterà legami tra la funzione, la sua derivata seconda e anche la sua derivata prima $\Rightarrow$ si parte da un sottinsieme di $\mathbb{R}^3$: $f: (x,y) \in Y \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $\bar{y}$ derivabile 2 volte in $I \subseteq \mathbb{R}$ e tale che $y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \ \forall x \in I$.

Allo stesso modo si procede nella definizione di equazioni **differenziali ordinarie di ordine n**:

Sia $f: Y \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to X \subseteq \mathbb{R}$, eq. diff: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Si vogliono individuare le funzioni in 1 variabile definite in I, derivabili n volte in I e tali che la loro derivata n-ma soddisfi l'uguaglianza $\forall x \in I$
Una soluzione (integrale) dell'equazione differenziale è una funzione $\bar{y}$ tale che $\bar{y}^{(n)} = f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n-1)}(x)) \ \forall x \in I$;
il suo grafico (se ha un legame geometrico) si dice **curva integrale**.
Un'equazione differenziale si dice **ordinaria** se tratta legami tra funzioni scalari in **1 variabile reale**; per ordini superiori al primo i legami sono tra le derivate parziali.

Esempi

- Consideriamo $f: I \to \mathbb{R}$ continua; l'equazione $y' = f(x)$ è un'equazione differenziale del primo ordine ed ha per soluzioni tutte e sole le primitive di f in I: condizione necessaria per l'applicazione del Teorema Fondamentale del calcolo integrale è che la funzione sia continua. Ciò vale anche per le equazioni differenziali con funzioni non dipendenti da y.

- $y'' = x$; $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; cerchiamo funzioni definite in $\mathbb{R}$, ivi derivabili due volte e tali che $f''(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$y' = \int x\,dx \Rightarrow y' = \frac{x^2}{2} + c_1$; Se $y(x)$ è una soluzione, necessariamente $\int y''(x) = \int x\,dx + c \Rightarrow y'(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$

$y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

riccardo.polidoro.org

- $y(x)=y'(x)$ Cerchiamo le funzioni reali di una variabile reale che coincidono con la propria derivata.

$f(x)=0$ è una soluzione.

Sia $y(x)$ una soluzione sempre diversa da 0. Allora:

$$\frac{y(x)}{y(x)}=\frac{y'(x)}{y(x)} \Rightarrow 1=\frac{y'(x)}{y(x)} \quad \forall x; \qquad \text{e risulta} \int \frac{y'(x)}{y(x)}dx=\int dx+c_1, \text{ ovvero:}$$

$$\log|y(x)|=x+c_1 \Rightarrow |y(x)|=e^{x+c_1} \Rightarrow y(x)=ce^x, \text{ con } c=\pm e^{c_1}$$

Dunque, le soluzioni dell'equazione sono le funzioni $y(x)=ke^x$, $k\in\mathbb{R}$

Problema di Cauchy o dei Valori Iniziali

È un problema che si affianca tipicamente alle equazioni differenziali.
Se $(x_0, h_0, h_1, \dots, h_{n-1})\in Y$, il problema di Cauchy di punto iniziale x_0 e valori iniziali $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$ consiste nel cercare una soluzione $\bar{y}$ dell'equazione differenziale:

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Tale che:

$$\bar{y}(x_0)=h_0,\ \bar{y}'(x_0)=h_1,\ \dots,\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0)=h_{n-1}$$

e si denota con
$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0)=h_0 \\ y'(x_0)=h_1 \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=h_{n-1} \end{cases}$$

Esempi

- $y=y'$; $y(x_0)=y_0$ $\quad x_0, y_0\in\mathbb{R}$ cerchiamo le soluzioni $y(x)$ tali che $y(x_0)=y_0$, cioè tali che il diagramma di $y(x)$ contiene il punto (x_0, y_0)

Avremo che $y(x_0)=ce^{x_0}$ e, ponendo $ce^{x_0}=y_0$, ricaviamo c univocamente: $c=y_0e^{-x_0}$

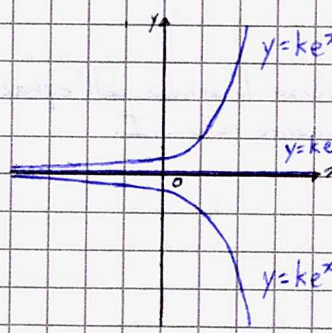
Ad esempio, la condizione $y(0)=-1$ ci porterebbe alla soluzione $y(x)=-e^x$

- Nell'equazione $y''=x$ non sarà sufficiente aggiungere una sola condizione per ottenere una funzione univocamente determinata: occorre una condizione anche sulla derivata prima:

$$y(0)=-1,\ y'(0)=2 \Rightarrow c_2=-1, c_1=2 \Rightarrow y(x)=\frac{x^3}{6}+2x-1$$ punto iniziale 0, valori iniziali $-1, 2$.

Una soluzione di un'equazione differenziale si dice un integrale dell'equazione differenziale e il suo diagramma si dice curva integrale.

Ad esempio, abbiamo visto che le curve integrali dell'equazione differenziale $y'=y$ sono:



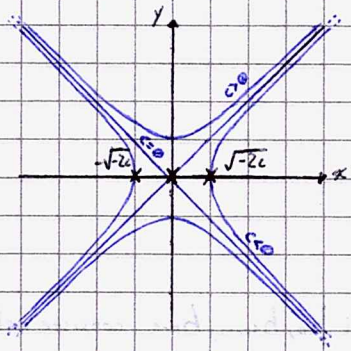
riccardo.polidoro.org

Prendiamo ora in esame l'equazione $y' = \frac{x}{y}$, che può essere "integrata" in $\mathbb{R}\times]-\infty,0[\cup \mathbb{R}\times]0,+\infty[$. Con le stesse tecniche usate precedentemente avremo:

$$y' = x/y \;; \qquad \int y'(x)\,y(x)\,dx = \int x\,dx + c \implies \frac{y^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + c \implies y^2(x) = x^2 + 2c \;,\; c \in \mathbb{R}$$

Ne segue che: $y(x) > 0 \iff y(x) = \sqrt{x^2+2c}$; $y(x) < 0 \iff y(x) = -\sqrt{x^2+2c}$

L'insieme di definizione delle funzioni sarà diverso a seconda che c sia:



- positivo $(X = \mathbb{R})$
- negativo $(X =]-\infty, -\sqrt{-2c}[\cup]\sqrt{-2c}, +\infty[$
- nullo $(X = \mathbb{R} - \{0\})$

Equazioni Differenziali Lineari (affini)

Siano $a_0, \dots, a_{n-1}$ e φ delle funzioni reali di 1 variabile reale definite nello intervallo I ($a_0, \dots, a_{n-1}$ si dicono **coefficienti** e φ **termine noto** dell'equazione differenziale).

L'equazione differenziale di ordine n $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \varphi$ si dice un'**equazione differenziale lineare di ordine n**, ottenuta a partire dall'espressione generica di un'equazione differenziale $(y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \;\forall x \in I)$ ponendo:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = -a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + (-a_1(x)\cdot y'(x)) - a_0(x)y(x) + \varphi(x)$$

che è una funzione affine (lineare) di $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ per ogni fissato $x \in I$.

Per $n=1$, l'equazione differenziale lineare del primo ordine è $y' + a_0 y = \varphi$. Una soluzione dell'equazione del primo ordine è una funzione $\bar{y}(x)$ derivabile e tale che $\bar{y}'(x) + a_0(x)\,y(x) = \varphi(x) \;\forall x \in I$.

Analogamente, una soluzione dell'equazione di ordine n è una funzione $\bar{y}$ derivabile n volte in I e tale che $\bar{y}^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,\bar{y}^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\,\bar{y}'(x) + a_0(x)\,\bar{y}(x) = \varphi(x) \;\forall x \in I$.

Se $\varphi = 0$, l'equazione differenziale si dice **omogenea** e, come una normale equazione lineare, ha certamente soluzione nulla. Altrimenti, l'equazione si dice **completa**

Approccio del Libro di Testo: Consideriamo le funzioni di classe $C^n(I)$, derivabili n volte con derivate continue nell'intervallo I. L'insieme delle funzioni di classe $C^n(I)$ ha struttura di spazio vettoriale, e se $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C^n(I)$, la funzione $L: y \in C^n(I) \to y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y \in C(I)$ è un operatore lineare:

- $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$
- $L(\alpha y) = \alpha L(y)$

$\forall\, y, y_1, y_2 \in C^n(I)$

Nomenclatura:
Spazi FUNZIONALI
f: OPERATORI

Se consideriamo anche $\varphi \in C(I)$, l'equazione differenziale lineare di ordine n si può semplicemente scrivere come un'equazione funzionale: $L(y) = \varphi$
Se φ non è identicamente nulla, l'equazione suddetta si dice completa; altrimenti l'equazione $L(y) = 0$ (0 è la funzione nulla in I, ovvero lo zero in $C(I)$) si dice omogenea.

Lo studio di un'equazione differenziale lineare completa passa attraverso lo studio dell'equazione omogenea **associata**, ovvero con gli stessi coefficienti ma con termine noto identicamente nullo in I.

riccardo.polidoro.org

Derivate parziali per funzioni vettoriali

Sia $\underline{f}: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una funzione e sia $\underline{x_0} \in \mathring{X}$. Si dice che $\underline{f}$ è derivabile parzialmente in $\underline{x_0}$ rispetto a x_i se $f_1, \dots f_k$ sono derivabili in $\underline{x_0}$ rispetto a x_i e il vettore:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\underline{x_0}), \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\underline{x_0})\right)$$

si chiama derivata parziale di $\underline{f}$ rispetto a x_i in $\underline{x_0}$ e si denota con $\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}(\underline{x_0})$.

Se $\underline{f}$ è derivabile parzialmente rispetto a tutte le variabili $x_1, \dots, x_n$ in $\underline{x_0}$, la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x_0}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\underline{x_0}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\underline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\underline{x_0}) \end{pmatrix} \quad \nabla f_1 \to \quad \nabla f_2 \to \quad \nabla f_k \to$$

denotata con $\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\underline{x_0})$, si chiama

MATRICE JACOBIANA di $\underline{f}$ in $\underline{x_0}$.

Se $k=n$, il determinante di tale matrice si chiama determinante Jacobiano di $\underline{f}$ in $\underline{x_0}$ (o solo Jacobiano di $\underline{f}$ in $\underline{x_0}$) e si denota con $J\underline{f}(\underline{x_0})$.

Per la derivata direzionale di funzioni vettoriali: si considera un vettore avente per componenti le derivate direzionali delle componenti.

Una funzione vettoriale $\underline{f}$ si dice differenziabile in $\underline{x_0}$ se le sue componenti sono differenziabili in $\underline{x_0}$. La condizione sufficiente per la derivabilità parziale si estende alle funzioni vettoriali: Se $\underline{f}$ è derivabile parzialmente in $I_{\underline{x_0}}$ e le derivate parziali sono funzioni continue, la funzione è differenziabile nel punto.

Teorema di differenziabilità delle funzioni composte

Utile nel calcolo di derivate parziali di $\underline{f}$ in + variabili

Siano $\underline{f}: X \to \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $g: Y \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione vettoriale ed una funzione scalare tali che $\underline{f}(X) \subseteq \mathring{Y}$.

Supponiamo che $\underline{x_0}$ sia un punto interno a X tale che $\underline{f}(\underline{x_0}) = \underline{y_0} \in \mathring{Y}$ e che $\underline{f}$ sia differenziabile in $\underline{x_0}$ e g sia differenziabile in $\underline{y_0}$.

Allora la funzione composta $h = g \circ \underline{f}: \underline{x} \to h(\underline{x}) = g(\underline{f}(\underline{x})) \in \mathbb{R}$ è differenziabile in $\underline{x_0}$ e si ha che

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial h}{\partial x_i}(\underline{x_0}) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\underline{y_0}) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\underline{x_0}) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_k}(\underline{y_0}) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\underline{x_0}) = \nabla g(\underline{f}(\underline{x_0})) \cdot \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}(\underline{x_0})$$

(espressione delle der. parz. della $\underline{f}$ composta)

Viene impiegato nella dimostrazione del Teorema di Lagrange per funzioni scalari in più variabili e nello studio dei campi vettoriali

Pre-Esempio

$$f(\underline{x}) = \log \|\underline{x}\| \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n - \{\underline{0}\}$$

se in 1 variabile, $\|\underline{x}\| = |x| \Rightarrow$ non derivabile in 0.
Analogamente, $\|\underline{x}\|$ è derivabile in $\mathbb{R}^n - \{\underline{0}\} \Rightarrow$ è derivabile in tutto l'insieme di definizione.

$$\forall \underline{x} \neq \underline{0}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|} \cdot \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\|\underline{x}\|^2} \to (n=1 \Rightarrow \frac{x}{|x|})$$

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Per il calcolo in più variabili occorre il suddetto teorema

riccardo.polidoro.org

Derivate parziali per funzioni vettoriali: esempi

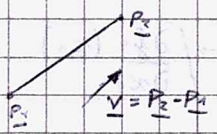
- $n=1$ $\quad \underline{\varphi}: t\in\mathbb{R}\to \underline{x}_0+t\underline{v}\in\mathbb{R}^k$, con $\underline{x}_0\in\mathbb{R}^k$ e $\underline{v}\neq\underline{0}$ è un versore di $\mathbb{R}^k$.

  La funzione ha come componenti x_i+tv_i, funzioni continue e, dunque, la derivata di $\underline{\varphi}$ esiste in ogni $t\in\mathbb{R}$ e:

  $$\underline{\varphi}'(t)=(\varphi_1'(t),\dots,\varphi_k'(t))=(v_1,\dots,v_k)=\underline{v}\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

  Considerando una funzione avente per codominio il segmento P_1P_2: $\underline{\Psi}: t\in[0,1]\to \underline{P_1}+t(\underline{P_2}-\underline{P_1})\in\overline{P_1P_2}$

  $$\underline{\Psi}'(t)=\underline{P_2}-\underline{P_1}\quad\forall t\in[0,1] \qquad \underline{\Psi}(0)=\underline{P_1},\ \Psi(1)=\underline{P_2}$$



- $n=k=2$ $\quad$ La trasformazione in coordinate polari nel piano $\mathbb{R}^2$ è derivabile in $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$:

  $$\underline{g}: (\rho,\vartheta)\in\overbrace{[0,+\infty[\times\mathbb{R}}^{X}\longrightarrow g(\rho,\vartheta)=(\overbrace{\rho\cos\vartheta}^{x},\overbrace{\rho\operatorname{sen}\vartheta}^{y})\in\mathbb{R}^2$$

  derivabile nell'insieme di definizione; $\underline{g}$ classe C^1 $\Rightarrow$ $\underline{g}$ è funzione di classe $C^1(X)$

  Matrice Jacobiana: $\dfrac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(\rho,\vartheta)}=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\rho\operatorname{sen}\vartheta\\ \operatorname{sen}\vartheta & \rho\cos\vartheta\end{pmatrix}$ e $\underline{J(\rho,\vartheta)=\rho}$

  → Teorema di cambiamento di variabili negli integrali doppi con passaggio alle coordinate polari ("$\rho\,d\rho\,d\vartheta$")

Ciò che è stato detto per le funzioni a valori reali si estende a quelle vettoriali tramite le componenti:

- Differenziabilità: $\underline{f}$ si dice *differenziabile* in $\underline{x}_0\in\mathring{X}$ se le sue componenti $f_1,\dots,f_k$ lo sono; è differenziabile in una regione X se $f_1,\dots,f_k$ sono ivi differenziabili.
  Valgono analogamente le operazioni su funzioni differenziabili (somma, prodotto SCALARE, ... di funzioni differenziabili è una funzione differenziabile.)
- Funzione di Classe C^i: se le sue componenti sono di classe C^i
- Una funzione di classe C^i in un aperto/regione è certamente differenziabile in tutto l'insieme.

Teorema di Lagrange per le funzioni SCALARI in più variabili

Non si estende alle funzioni vettoriali!

Sia $f: X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ e siano $\underline{p}$ e $\underline{q}$ due punti di X distinti tali che $\overline{pq}\subseteq X$.

Allora, se f è **continua** su tutto $\overline{pq}$ ed è **differenziabile** su $\overline{pq}-\{\underline{p},\underline{q}\}$:

$$\exists\,\underline{c}\in\overline{pq}-\{\underline{p},\underline{q}\}: f(\underline{q})-f(\underline{p})=\nabla f(\underline{c})\cdot(\underline{q}-\underline{p})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{c})\cdot(q_i-p_i)$$

riccardo.polidoro.org

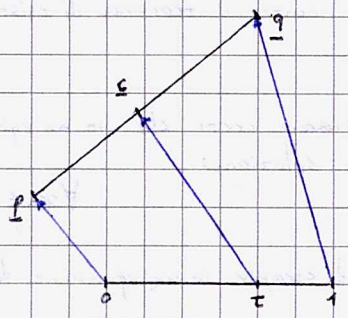
Dimostrazione

Consideriamo la funzione $\underline{\psi}: t \in [0,1] \to \underline{\psi}(t) = \underline{p} + t(\underline{q}-\underline{p}) \in \overline{pq}$. Sappiamo che $\underline{\psi}$ è derivabile in $[0,1]$ e $\underline{\psi}'(t) = \underline{q} - \underline{p} \quad \forall t \in [0,1]$.

La funzione composta $f \circ \underline{\psi} = \varphi: t \in [0,1] \to f(\underline{\psi}(t)) \in \mathbb{R}$ è differenziabile su $]0,1[$, continua su $[0,1]$ e $\forall t \in]0,1[$, $\varphi'(t) = \nabla f(\underline{\psi}(t)) \cdot \underline{\psi}'(t) =$ (Teorema sulla differenziabilità delle f. composte)

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{\psi}(t))(q_i - p_i)$$

Applicando il Teorema di Lagrange (in $\mathbb{R}$) a φ in $[0,1]$ si ottiene l'esistenza di un $\tau \in]0,1[$ tale che: $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)[1-0]$



Poiché $\cdot \varphi(1) = f(\underline{\psi}(1)) = f(\underline{q})$, detto $\underline{\xi}$ il punto $\underline{\psi}(\tau)$ si ha la tesi.
$\cdot \varphi(0) = f(\underline{\psi}(0)) = f(\underline{p})$

Tornando alle Equazioni Differenziali Lineari...

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x)$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \varphi$ funzioni continue in uno stesso intervallo I

Possiamo considerare l'operatore L:

$$L: y \in C^n(I) \to L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y \in C(I)$$

È una funzione definita in I, certamente continua: y è derivabile con derivate continue fino all'ordine n.

È un'operatore lineare (conserva le combinazioni lineari):

- $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$
- $L(\alpha y) = \alpha L(y)$

Ciò perché l'operazione di derivazione conserva la somma e il prodotto per uno scalare $\Rightarrow$ applicando la proprietà distributiva rispetto alle derivate si ottiene quanto detto

Equazione differenziale lineare: • omogenea: $L(y) = 0$ (φ identicamente nulla)
• completa: $L(y) = \varphi$

Il **problema di Cauchy** per un'equazione differenziale lineare di ordine n $L(y) = \varphi$ consiste nel fissare un punto iniziale x_0 in I (intervallo di definizione dei coefficienti e del termine noto) e n numeri reali $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$ (valori iniziali) e cercare una soluzione di $L(y) = \varphi$, ~~che~~ ovvero:

$\bar{y} = u$ soluzione di $L(y) = \varphi \iff$
- $u(x_0) = h_0$
- $u'(x_0) = h_1$
- ...
- $u^{(n-1)}(x_0) = h_{n-1}$

Teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali lineari

Se i coefficienti $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ e il termine noto (φ) sono funzioni continue in un intervallo I, allora il problema di Cauchy per $L(y) = \varphi$ con qualsiasi punto iniziale in I e qualsiasi n-pla di valori iniziali in $\mathbb{R}$, ammette una ed una sola soluzione definita in tutto I.

(Basta che i coefficienti siano continui)

⚠ Per le equazioni differenziali NON LINEARI, la continuità dei dati non è sufficiente per ottenere l'unicità delle soluzioni per il problema di Cauchy.

riccardo.polidoro.org

Il problema di Cauchy per un'equazione lineare omogenea con un qualunque punto iniziale ed uno dei valori iniziali $=0$ ...

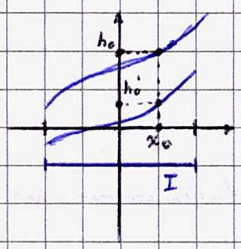
$L(y)=0$ $\quad y=0$ è identicamente nulla $\Rightarrow$ $y(x_0)=0$ soddisfa il problema di Cauchy, ma per il teorema di esistenza e unicità è L'UNICA

Dunque, per le equazioni lineari del PRIMO ORDINE, in cui la condizione iniziale è solo una, si osserva che scartata la soluzione identicamente nulla le soluzioni sono sempre $\neq 0$, in tutti i punti (altrimenti andremmo contro il teorema di esistenza e unicità.

Siamo certi che in un'equazione differenziale lineare, comunque si scelga il punto $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha una e una sola soluzione:

$$\forall x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}^n,\ \forall (h_0,\dots,h_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\ \exists!\ \bar{y} : L(\bar{y})=\varphi \text{ e } \bar{y}(x_0)=h_0,\ y'(x_0)=h_1,\dots,y^{n-1}(x_0)=h_{n-1}$$ T. esistenza e unicità

Ad esempio, in un'equazione del I ordine:



Questa identificazione dell'unica soluzione può essere effettuata qualunque sia h_0; tutte le possibili soluzioni di un'equazione differenziale (lineare o meno) si possono ottenere semplicemente facendo variare i valori iniziali $\Rightarrow$ esiste un'espressione in grado di definire tutte e sole le soluzioni dell'equazione lineare.

Integrale Generale di un'equazione differenziale LINEARE

È l'insieme di tutte e sole le soluzioni dell'equazione $L(y)=\varphi$. Una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale viene detta **integrale particolare**.

Per determinare l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare di ordine n, strutturiamo le seguenti osservazioni:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x) \iff L(y)=\varphi$$

- Se u è una soluzione dell'equazione omogenea associata e v è una soluzione dell'equazione completa, allora $u+v$ è soluzione dell'equazione completa:

$$\left.\begin{matrix} L(u)=0 \\ L(v)=\varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow L(u+v)=L(u)+L(v)=0+\varphi=\varphi$$

- Se v_1 e v_2 sono soluzioni dell'equazione completa, v_1-v_2 è soluzione dell'equazione omogenea

$$\left.\begin{matrix} L(v_1)=\varphi \\ L(v_2)=\varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow L(v_1-v_2)=L(v_1)-L(v_2)=\varphi-\varphi=0$$

- Se consideriamo v una soluzione particolare dell'equazione completa e w una qualsiasi soluzione dell'equazione completa, allora esiste una soluzione u dell'equazione omogenea tale che $w=v+u$.

$$w=v+u \Rightarrow w=v+(w-v) \qquad \big(L(w-v)=0\big) \Rightarrow L(v)=L(w)=\varphi$$

Riccardo.polidoro.org

Se denotiamo con U l'integrale generale dell'equazione omogenea e V l'integrale generale dell'equazione completa, sulla base delle osservazioni precedenti si ottiene che:

$$V = U + v$$ con v integrale particolare dell'equazione completa.

Insiemisticamente, ciò implica che $V \subseteq U+v$ e $V \supseteq U+v$:

- considerando $u \in U$, $\forall u \quad u+v \in V \Rightarrow V \supseteq U+v$ (I oss.)
- $\forall w \in W, \quad w = u+v \Rightarrow V \subseteq U+v$ (II oss.)

Dunque, per determinare l'integrale generale dell'equazione completa è sufficiente trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata ed un integrale particolare dell'equazione completa.

In entrambi questi "passi" si utilizza un particolare determinante costruito a partire da una n-pla di soluzioni dell'equazione omogenea (in generale, si può definire per n funzioni di classe C^n).

$y_1, \dots, y_n$ funzioni di classe $C^n(I)$; $x_0 \in I$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

Il determinante della matrice avente per righe $y_1, \dots, y_n$ e le loro derivate fino all'ordine n, tutte calcolate nel punto x_0, si dice **wronskiano** delle funzioni $y_1, \dots, y_n$ nel punto x_0.

Facendo variare x in I, si costruisce una funzione continua, derivabile...

Il wronskiano coincide col determinante dei coefficienti di alcuni sistemi lineari che studieremo per determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale completa.

Ricordiamo che una n-pla $y_1, \dots, y_n$ è composta da funzioni linearmente dipendenti se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ scalari NON TUTTI NULLI tali che $\lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \ \forall x \in I$ e che $y_1, \dots, y_n$ si dicono linearmente indipendenti se non sono dipendenti.

Proposizione 1 (Teorema sul Wronskiano):

Se $y_1, \dots, y_n$ sono n soluzioni dell'equazione omogenea, allora $y_1, \dots, y_n$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow W(x) = 0 \ \forall x \in I$

Analogamente, $y_1, \dots, y_n$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow W(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

Proposizione 2: Esistono INFINITE n-ple di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $L(y) = 0$ (sempre a coefficienti continui)

Proposizione 3: Se $y_1, \dots, y_n$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $L(y) = 0$, allora ogni soluzione u di tale equazione è combinazione lineare di esse $\Rightarrow$ $y_1, \dots, y_n$ è un sistema di generatori del sottospazio delle soluzioni dell'equazione omogenea (dimensione n)

Teorema: L'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea di ordine n si rappresenta con la formula $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$, con $c_i \in \mathbb{R}$ e dove $y_1, \dots, y_n$ sono n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione in esame.

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione completa si rappresenta con la formula:

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + v$$ con c_i, y_i definite in precedenza e v è una soluzione particolare dell'equazione completa.

riccardo.polidoro.org

Teorema (Metodo di Lagrange)

Se $y_1, \dots, y_n$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $L(y)=0$, allora esistono n funzioni $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ di classe $C^1(I)$ tali che la funzione:

$$v: x \in I \to v(x) = \gamma_1(x) y_1(x) + \dots + \gamma_n(x) y_n(x)$$

sia soluzione dell'equazione completa $L(y)=\varphi$.

Le funzioni $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ possono essere determinate risolvendo il sistema nelle incognite $\gamma_1'(x), \dots, \gamma_n'(x)$:

$$\begin{cases} y_1(x)\,\gamma_1'(x) + \dots + y_n(x)\,\gamma_n'(x) = 0 \\ y_1'(x)\,\gamma_1'(x) + \dots + y_n'(x)\,\gamma_n'(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-2)}(x)\,\gamma_1'(x) + \dots + y_n^{(n-2)}(x)\,\gamma_n'(x) = 0 \\ y_1^{(n-1)}(x)\,\gamma_1'(x) + \dots + y_n^{(n-1)}(x)\,\gamma_n'(x) = \varphi \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Entra in gioco il Wronskiano.

E successivamente integrando $\gamma_1', \dots, \gamma_n'$.

Tale metodo viene anche detto metodo della variazione delle costanti arbitrarie

Teorema sulle funzioni con gradiente nullo

L'applicazione del Teorema di Lagrange (*f continua in un segmento, differenziabile nei punti interni $\Rightarrow \exists$ un punto del segmento diverso dagli estremi tale che la differenza dei valori della f negli estremi è uguale al prodotto scalare del gradiente della f in questo punto per la differenza fra i due estremi, ovvero il vettore direzione del segmento*) ha una importante applicazione sulle funzioni con derivate parziali identicamente nulle (come in AM1: se una funzione ha derivata identicamente nulla in un intervallo, essa è certamente costante nell'intervallo); ciò non vale se l'insieme di definizione non è un intervallo poiché non sarebbe possibile applicare il T. di Lagrange).

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita e derivabile parzialmente rispetto a tutte le variabili nell'**aperto connesso** X, con derivate parziali identicamente nulle in X ($\nabla f(x) = 0 \ \forall x \in X$), allora **$f$ è costante in X.**

Dim

Siano P e Q due punti distinti di X. Poiché X è aperto e connesso, è anche connesso per poligonali. Perciò esiste una poligonale di estremi P e Q tutta contenuta in X:

$$\underline{P} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1} P_i}, \quad \text{con } P_0 \equiv P \neq P_1 \neq \dots \neq P_n \equiv Q$$

Essendo le derivate parziali funzioni identicamente nulle in X, esse sono certamente continue $\Rightarrow$ f è differenziabile in tutto l'aperto X e, in particolare, sulla poligonale appena definita: si può applicare il teorema di Lagrange ad ogni segmento della poligonale:

$\overline{P P_1}$: $\exists c \in \overline{P P_1} : f(P_1) - f(P) = \underbrace{\nabla f(c)}_{0} \cdot (P - P_1) = 0 \Rightarrow f(P_1) = f(P)$

$\overline{P_1 P_2}$: $\dots \Rightarrow f(P_2) = f(P_1) = f(P)$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f(P) = f(Q)$, con P e Q punti arbitrari dell'aperto $X \Rightarrow$ la funzione è costante in X □

Come per le funzioni in una variabile, il fatto che X sia connesso è un'ipotesi essenziale: ad esempio, la funzione $f(x,y) = 1$ se $xy > 0$, $= 0$ se $xy < 0$; definita in $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ($xy \neq 0$) ha derivate identicamente nulle in X ma non è costante, ed X non è connesso.

Il teorema si estende alle regioni internamente connesse se la funzione è supposta continua.

riccardo.polidoro.org

↱ continua

In una regione internamente connessa il Teorema di Lagrange si applica su un segmento o una funzione di classe C^1 su tutta la regione: se le derivate parziali sono identicamente nulle la funzione è costante in tutta la regione.
La funzione deve essere supposta continua: nell'interno si ragiona come negli aperti, mentre sui punti di ∂X dire all'applicazione del T. di Lagrange si può dire che essendo f costante in tutti i punti interni lo è necessariamente anche sui punti della frontiera: il limite di una costante è la costante stessa, e se una funzione è continua il limite della funzione in un punto è pari al valore della funzione in quel punto.

Derivate di ordine superiore

Sia $\underline{x_0} \in \mathring{X}$ tale che f sia derivabile parzialmente in un suo intorno (tutto contenuto in X) rispetto alla variabile x_i, con $i \in \{1, \dots, n\}$.
Consideriamo ora un indice $j \in \{1, \dots, n\}$. Se la derivata parziale rispetto a x_i $\partial f / \partial x_i$ è a sua volta derivabile parzialmente rispetto a una variabile x_j nel punto x_0, diremo che **f è derivabile in $\underline{x_0}$ due volte rispetto alle variabili x_i, x_j** e la derivata seconda in $\underline{x_0}$ rispetto a x_i e x_j si denota con:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x_0}) \quad \text{oppure} \quad f_{x_i x_j}(\underline{x_0})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \to \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

⚠ L'ordine è importante! Deriviamo prima rispetto a x_i e poi rispetto a x_j

Se $i \neq j$, la derivata seconda si dice MISTA; altrimenti è detta PURA e si denota con $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\underline{x_0})$, $f_{x_i x_i}(\underline{x_0})$, $f_{x_i^2}(\underline{x_0})$

Il numero di derivate seconde che si possono considerare per una funzione in n variabili è n^2.

Se f è derivabile due volte in un sottinsieme Y di X rispetto alle variabili x_i, x_j, si può considerare la funzione derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : \underline{x} \in Y \to \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x}) \in \mathbb{R}$$

Una funzione f definita in un aperto X di $\mathbb{R}^n$ si dice di classe $C^2(X)$ se f è derivabile (parzialmente) due volte rispetto a **tutte le coppie** di variabili in X e se f è continua insieme alle derivate fino all'ordine 2.
Se $f \in C^2(X)$ allora $f \in C^1(X)$: la derivata prima è differenziabile e, dunque, continua e, di conseguenza, f è differenziabile e continua.

Queste definizioni si estendono a funzioni definite in una regione definendo le derivate seconde sulla frontiera per continuità.

Esempi

- $f(x,y) = xy - x^2$ derivabile parzialmente in $\mathbb{R}^2$ rispetto a entrambe le variabili

$$f_x = y - 2x \Rightarrow f_{x^2} = -2 \quad f_{xy} = 1 \qquad f_y = x \Rightarrow f_{y^2} = 0 \quad f_{yx} = 1$$

- $g(x,y) = e^{y/x}$ $\quad g_x = -\frac{y}{x^2} e^{y/x} \Rightarrow g_{xx} = \frac{2y}{x^3} e^{y/x} - \frac{y}{x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) e^{y/x}$, $g_{xy} = -\frac{1}{x^2} e^{y/x} - \frac{y}{x^3} e^{y/x}$ $\quad g_y = \frac{1}{x} e^{y/x} \to g_{yx} = -\frac{1}{x^2} e^{y/x} - \frac{y}{x^3} e^{y/x}$

- $h(x,y) = \sqrt{xy}$ definita nella regione $xy \geq 0$; derivabile parzialmente nei punti interni rispetto a entrambe le variabili $\Rightarrow$ ragioniamo solo nei punti interni

Osservazione: Le derivate miste rispetto a x e y e rispetto a y e x COINCIDONO. Questo fenomeno non è casuale.

riccardo.polidoro.org

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Per conoscere l'integrale generale dell'equazione omogenea associata ad un'equazione differenziale lineare ~~del primo ordine~~ occorre conoscere n integrali particolari linearmente indipendenti (dell'omogenea); per un'equazione del primo ordine coincide con il trovare una funzione linearmente indipendente, ovvero una funzione non identicamente nulla.

Siano a e b funzioni continue in un intervallo I. Per determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale del primo ordine $y' = a(x)y + b(x)$ cominciamo a considerare l'omogenea associata $y' = a(x)y$ e sia $y(x)$ una soluzione non nulla.
Per il teorema di esistenza e unicità siamo certi che $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, poiché altrimenti sarebbe una funzione non identicamente nulla che soddisfa il problema di Cauchy con valore iniziale nullo.

Possiamo dunque trasformare l'equazione in un'equazione equivalente dividendo per $y(x)$:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x) \implies \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int a(x)\,dx + c_1 \quad \text{e, detta } A \text{ una primitiva di } a \text{ in } I, \text{ avremo:}$$

$$\log|(y(x))| = A(x) + c_1 \implies |y(x)| = e^{A(x)+c_1} \implies |y(x)| = k e^{A(x)}, \ k > 0$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà dato dalla formula $y(x) = c\,e^{A(x)}$, $c \in \mathbb{R}$.

Per determinare l'integrale generale dell'equazione completa, sarà necessario determinare un integrale particolare $v(x)$.
Attraverso il Metodo di Lagrange, supponiamo che esiste una funzione $\gamma(x)$ di classe $C^1(I)$ tale che:

$$v(x) = \gamma(x)\,e^{A(x)}$$

Per determinare tale funzione γ imponiamo che $v(x)$ soddisfi l'equazione differenziale completa e otteniamo dunque che:

$$v'(x) = a(x)v(x) + b(x) \qquad \forall x \in I$$

Esplicitando $v'(x)$ otteniamo quindi $\gamma'(x)\,e^{A(x)} + \gamma(x)\overbrace{A'(x)}^{a(x)}\,e^{A(x)} = a(x)\gamma(x)\,e^{A(x)} + b(x) \implies$

$$\implies \gamma'(x)\,e^{A(x)} = b(x) \quad \forall x \in I$$

Ne segue che $\gamma(x) = \int b(x) \cdot e^{-A(x)}\,dx$. Ciò sarà particolarmente utile negli esercizi.

Esempi

- $y' = \overbrace{y\,(x^3+1)}^{a(x)}$ $\qquad I = \mathbb{R}$, il coefficiente è definito in tutto $\mathbb{R}$.

Scartiamo la soluzione nulla ed integriamo (dopo aver diviso per y): $\log|(y(x))| = \frac{x^4}{4} + x + c_1 \implies |y(x)| = e^{\frac{x^4}{4}+x+c_1} \implies$

$$\implies y(x) = c\,e^{\frac{x^4}{4}+x}, \ c \in \mathbb{R} \qquad \text{integrale generale}$$

Consideriamo il Problema di Cauchy di punto iniziale 1 e valore iniziale -1 $(y(1) = -1)$; per risolverlo è sufficiente sostituire ad x 1 nell'integrale generale e -1 è il valore che deve assumere $\implies$ ricaviamo c

$$c\,e^{\frac{1}{4}+1} = -1 \implies c = -e^{-5/4} \implies \text{soluzione: } y(x) = -e^{\left(\frac{x^4}{4}+x-\frac{5}{4}\right)}$$

- $y' = -\frac{y}{x}$ $\qquad I =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\implies$ il coefficiente non è definito in un intervallo, andranno fatti due integrali distinti.

Scartiamo la soluzione nulla; $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \implies \log|y(x)| = -\log|x| + c_1$ / $|y(x)| = e^{c_1} \cdot e^{-\log|x|} = e^{c_1} \cdot \frac{1}{|x|}$ (non posso scorporare c_1)

Riccardo Polidoro .org

Dunque, $|y(x)| = k \cdot \frac{1}{|x|}$ $k>0$ $\Rightarrow$ $y(x) = \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$ Integrale generale, separatamente nei due integrali

$c=0 \Rightarrow$ sol nulla

$c<0 \Rightarrow]-\infty, 0[$

- $y' = y \log x$ $\quad I =]0, +\infty[$

$$\log|y(x)| = \int \log x \, dx + c_1 = x\log x - x + c_1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = c\, e^{x\log x - x} \quad \text{(int. generale)} \qquad x \in]0,+\infty[,\ c \in \mathbb{R}$$

Se vogliamo risolvere il problema di Cauchy $y(e) = 2$, otteniamo:

$$c\, e^{e\log e - e} = 2 \Rightarrow \quad c = 2 \quad \text{e dunque} \quad y(x) = 2\, e^{x\log x - x}$$

- $y' = \frac{x}{x^2+1} y$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad$ Scartiamo la soluzione identicamente nulla

$$\log|y(x)| = \int \frac{x}{x^2+1} dx + c_1 \Rightarrow \log|y(x)| = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c_1 \Rightarrow |y(x)| = e^{c_1} \cdot e^{\frac{1}{2}\log(x^2+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y(x)| = k\sqrt{x^2+1} \quad k>0$$

Integrale generale: $y(x) = c\sqrt{x^2+1}$, $c \in \mathbb{R}$ (include sol. nulla e negative ecc.) $\quad$ ($|y(x)| = \pm \dots$)

- $y' = y \operatorname{tg} x$ $\quad I =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$

$$\left[\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log\cos x + c\right]$$

Scartiamo la soluzione nulla, $\log|y(x)| = \int \operatorname{tg} x \, dx + c_1 \Rightarrow \log|y(x)| = -\log|\cos x| + c_1$;

$$|y(x)| = k \cdot \frac{1}{|\cos x|} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{c}{\cos x}, \ c \in \mathbb{R} \text{ integrale generale}$$

- $y' = \frac{y}{x}$ $\quad$ Integrale generale: $y(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$ $\quad (\log|y(x)| = \log|x| + c_1)$ $\quad$ IMMEDIATO

- $y' = y \operatorname{cotg} x$ $\quad \log|y(x)| = \log|\operatorname{sen} x| + c_1 \Rightarrow \quad y(x) = c \operatorname{sen} x$, $c \in \mathbb{R}$

Dopo aver trovato l'integrale generale dell'equazione omogenea, bisogna solo trovare un integrale particolare dell'equazione completa: sommandolo al suddetto integrale generale si ottiene l'integrale generale dell'equazione completa (insieme delle soluzioni dell'equazione completa).

$$y' = a(x)y + b(x), \quad x \in I, \quad a(x) \text{ e } b(x) \text{ continue in } I$$

$y' = a(x)y$ omogenea associata, integrale generale: $y(x) = c\, e^{A(x)}$ con $c \in \mathbb{R}$ e A primitiva di a

Applichiamo il metodo di Lagrange: cerchiamo una soluzione particolare $v(x)$ dell'equazione completa, che abbia la medesima espressione ma non con c fissato $\Rightarrow$ cerchiamo una soluzione $v(x)$ della completa facendo vedere che esiste certamente una funzione $\gamma(x) \in C^1(I)$ tale che $v(x) = \gamma(x) e^{A(x)}$ e v sia soluzione dell'equazione completa.

riccardo.polidoro.org

Il procedimento è analogo a quanto fatto nei primi esempi iniziali: consideriamo la funzione $v(x) = \gamma(x) e^{A(x)}$, con γ incognita e imponiamo che essa sia soluzione dell'equazione completa $y' = a(x)y + b(x)$.

Allora, posto $v(x) = \gamma(x) e^{A(x)}$, imponiamo che $v(x)$ sia soluzione dell'equazione completa.

$$v'(x) = \gamma'(x) e^{A(x)} + \gamma(x) A'(x) \cdot e^{A(x)}$$

$$\gamma'(x) e^{A(x)} + \cancel{\gamma(x) A'(x) \cdot e^{A(x)}} = \overbrace{a(x)}^{a(x)} \cdot \overbrace{\gamma(x) e^{A(x)}}^{v(x)} + b(x) \qquad \forall x \in I$$

$$y' = a(x) y + b(x)$$

Ne segue che, necessariamente, $\gamma'(x) = e^{-A(x)} b(x)$ — certamente esiste l'integrale indefinito: $b(x)$ è continua, $A(x)$ è continua perché primitiva $\Rightarrow$ ~~cont~~ continua e l'esponenziale di una f continua è continua

E, presa γ come primitiva di $e^{-A(x)} b(x)$ si ha che:

- γ è di classe $C^1(I)$
- $v(x) = \gamma(x) e^{-A(x)}$ è una soluzione dell'equazione completa.

⚠ Alcune f non sono elementarmente integrabili: un esempio sono le funzioni $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, e^{-x^2}, $\frac{1}{\log x}$ hanno primitive ma non è possibile determinarne l'espressione

Esempi

- $y' = -\frac{y}{x} + \sin x \qquad I =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ — Integrale generale eq. omogenea: $y^*(x) = \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$

$$v(x) = \frac{\gamma(x)}{x}$$

Imponendo che v sia soluzione dell'equazione completa, risulta necessariamente che:

$$\frac{\gamma'(x)}{x} = \sin x \qquad \text{e quindi} \qquad \gamma(x) = \int x \sin x \, dx = -x\cos x + \sin x + k$$

x è sicuramente $\neq 0$ per l'insieme di definizione

Supponendo $k = 0$, otteniamo la funzione particolare $\gamma(x) = \sin x - x\cos x$, da cui si ottiene la soluzione particolare $v(x)$:

$$v(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x}$$

Integrale generale dell'eq. completa: ~~$y(x) = \frac{1}{x}(c + \sin x) - \cos x$~~ $\qquad c \in \mathbb{R}, \ x \in I$

- $y' = \frac{x}{x^2+1} y + 1 \qquad I = \mathbb{R}$ — Int. gen. omogenea: $y(x) = c\sqrt{x^2+1}$

Posto $v(x) = \gamma(x)\sqrt{x^2+1}$ determiniamo $\gamma(x)$ imponendo che v risolva l'equazione completa.

$$v': \quad \gamma'(x)\sqrt{x^2+1} = 1 \implies \gamma'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \implies \gamma(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + k \quad \left(\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx\right)$$

Supponiamo $k = 0 \Rightarrow v(x) = \sqrt{x^2+1}\,\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$y(x) = \sqrt{x^2+1}\left(c + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) \qquad c \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}$$

Integrale generale dell'equazione completa.

Riccardo.polidoro.org

$y' = y\,tg\,x + \sin x$ $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$

Int. gen. eq. omogenea: $y(x) = \frac{c}{\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$

Se fosse assegnato il problema di Cauchy di punto iniziale 0, ci si restringe all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e analogamente per altri punti

$y(x) = \frac{\gamma(x)}{\cos x}$ (classe $C^1(I)$!!) $\quad y(x)$ sol. $\Rightarrow \frac{\gamma'(x)}{\cos x} = \sin x \ \forall x \in I \Rightarrow \gamma'(x) = \sin x \cos x \Rightarrow \gamma(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$

$\cos x \neq 0 \ \forall I$

$g'(\sin x) = \cos x$: $\int g \cdot g' = \frac{g^2}{2}$

$v(x) = \frac{\sin^2 x}{2\cos x} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\cos x}\left(c + \frac{\sin^2 x}{2}\right)$, $c \in \mathbb{R}$ Int. gen. eq. completa

- $y' = \frac{y}{x} + \log x$ $\quad I =]0, +\infty[$

Int gen eq. omogenea: $y(x) = cx$

$y(x) = \gamma(x) \cdot x$ sol. part. $\Rightarrow \gamma'(x) \cdot x = \log x \Rightarrow \gamma' = \frac{\log x}{x} \Rightarrow \gamma(x) = \frac{1}{2}\log^2 x$

$v(x) = \frac{x}{2}\log^2 x$; $y(x) = x\left(c + \frac{\log^2 x}{2}\right)$, $c \in \mathbb{R}$

- $\begin{cases} y' = y\,\mathrm{cotg}\,x + 1/\sin x \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \end{cases}$ problema di Cauchy

$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$ ma, poiché la condizione di Cauchy ha punto iniziale $\frac{\pi}{4}$, consideriamo $I =]0, \pi[$.

Int. gen eq. omogenea: $y' = y\,\mathrm{cotg}\,x \Rightarrow \log|y(x)| = \log|\sin x| + c_1 \Rightarrow y(x) = c\sin x$, $c \in \mathbb{R}$

$y(x) = \gamma(x)\sin x$ sol. part. $\Rightarrow \gamma'(x)\sin x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \gamma'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \gamma(x) = -\mathrm{cotg}\,x$

$v(x) = -\mathrm{cotg}\,x \cdot \sin x = -\cos x \Rightarrow y(x) = c\sin x - \cos x$

DA QUI SI PARTE PER LA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow c - 1 = 2 \Rightarrow c = 3$

Soluzione del problema di Cauchy è la funzione $u(x) = 3\sin x - \cos x$

Per il T. di esistenza e unicità è l'unica soluzione; verifichi derivando $u(x)$: dovresti avere $u(x)\,\mathrm{cotg}\,x + \frac{1}{\sin x}$

NON FERMARTI A TROVARE C!

riccardo.polidoro.org

Risoluzione delle equazioni differenziali complete di ordine n

Si utilizza lo stesso metodo, ma con n costanti arbitrarie ed n funzioni $\gamma \in C^1(I)$.

Si dimostra che, se $y_1, \dots, y_n$ sono n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata $L(y)=0$, allora esistono n funzioni $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ di classe $C^1(I)$ tali che la funzione:

$$v(x) = \underbrace{\gamma_1(x)}_{\text{incognite}} y_1(x) + \dots + \gamma_n(x) y_n(x)$$

è soluzione dell'equazione $L(y)=\varphi$ in tutto I (dove sono definiti coeff. e t.noto)

Per calcolare le funzioni $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ si utilizzeranno le loro derivate prime, coinvolte in un sistema lineare da risolvere $\forall x \in I$:

$$\begin{cases} \gamma_1'(x) y_1(x) + \dots + \gamma_n'(x) y_n(x) = 0 \\ \gamma_1'(x) y_1'(x) + \dots + \gamma_n'(x) y_n'(x) = 0 \\ \dots \\ \gamma_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + \dots + \gamma_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ \gamma_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + \gamma_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = \varphi \end{cases}$$

È un sistema lineare NON OMOGENEO (l'ultima equazione ha termine noto φ); le soluzioni dunque dipendono dal determinante dei coefficienti, ovvero il Wronskiano $W(x)$.

Si ricorda che se abbiamo una n-pla di soluzioni linearmente indipendenti, il Wronskiano risulta $\neq 0 \ \forall x \in I$ e, dunque, il sistema in esame è un Sistema di Cramer $\forall x \in I \Rightarrow$ ammette una e una sola soluzione.

Bisognerà poi effettuare n integrali delle funzioni $\gamma_1', \dots, \gamma_n'$ per trovare le soluzioni.

Se i coefficienti sono funzioni costanti (numeri reali; se i coefficienti dipendono da x non esiste un metodo generale più semplice di risoluzione) si possono semplificare i calcoli con metodi più semplici.

Osservazione: $y' = ay + \varphi(x)$ $\quad$ $a \neq 0$ cost

$$\log|y(x)| = \int a\,dx + c_1 = ax + c_1 \Rightarrow y(x) = c e^{ax}$$ int. gen eq. omogenea (n sol. l.in. ind.)

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ equazione omogenea associata, con $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ cost.

Osserviamo che se $\lambda \in \mathbb{R}$ ed $e^{\lambda x}$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata si ha necessariamente che, essendo i coefficienti costanti:

$$\underbrace{e^{\lambda x}}_{\text{sempre} \neq 0} \underbrace{\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \dots + a_1\lambda + a_0 \lambda^0 \right)}_{\lambda^0 = 1} = 0 \ \forall x \in I$$

→ Necessariamente $= 0 \Rightarrow$ basta studiare questa eq. algebrica!

È naturale allora considerare l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale (omogenea)

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$ si risolve in λ

È un'equazione algebrica di grado n

⚠ Per $n > 1$ esistono soluzioni non reali!

riccardo.polidoro.org

Numeri Complessi

L'insieme dei numeri complessi si costruisce in maniera tale da dare senso alla radice di indice pari di un numero negativo; definiamo dunque l'**unità immaginaria** i, costruita appositamente tale che $i^2 = -1$.

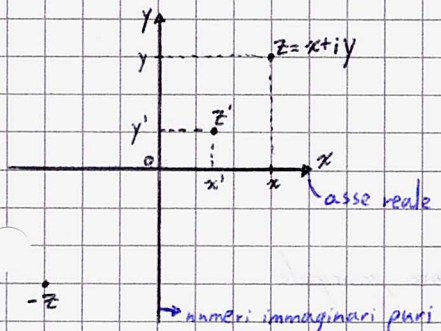
Poiché la costruzione di questo insieme è necessaria come ampliamento del campo reale, non bastano i numeri del tipo $i \cdot x$:

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \qquad z = x + iy$$

x: parte reale; y: coefficiente dell'immaginario

Se $y = 0$, si ottiene $\mathbb{R}$!

Geometricamente, i numeri complessi si rappresentano in un piano, detto **Piano di Gauss** (si ricorda che i numeri reali vengono rappresentati su una retta orientata):



Risulta dunque elementare la definizione delle operazioni:

$z = x + iy$; $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$

- $z + z' = (x + x') + i(y + y')$

Occorre però definire un'operazione di prodotto INTERNA all'insieme, ci giungiamo "per via ingenua":

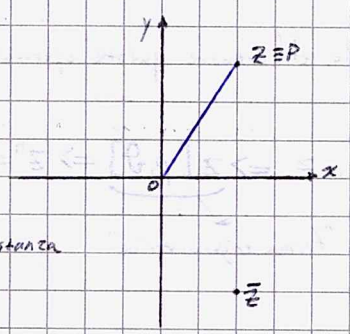
$$zz' = (x+iy)(x'+iy') = \underbrace{(xx' - yy')}_{\text{parte reale}} + i(x'y + xy')$$

Dunque, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo: rispetto alla somma è un gruppo commutativo, rispetto al prodotto lo è se vi togliamo lo 0 rispetto alla somma (ovvero $0 \in \mathbb{R}$)

- Elemento neutro rispetto alla somma: $0 \in \mathbb{R}$
- Elemento opposto: $-z = -x - iy$
- Elemento neutro rispetto al prodotto è $1 \in \mathbb{R}$
- Simmetrico rispetto al prodotto *

* Occorre introdurre il **coniugato** $\bar{z}$ di un numero complesso z:

$z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$ è il simmetrico di z rispetto all'asse x.



Proprietà

- $(\bar{\bar{z}}) = z$
- $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+ \equiv \|OP\|^2 = |z|^2$

Si definisce **modulo** di z $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, coincidente con la distanza dall'origine del punto rappresentante z dall'origine.

Se $z \neq 0$: $\dfrac{1}{z} = z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|}$

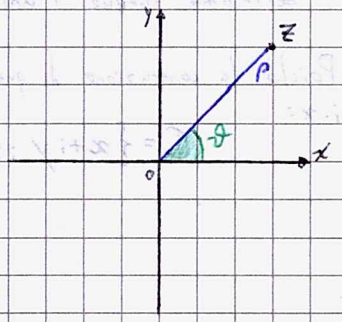
Serve anche da modello per l'operazione di divisione:

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\,\bar{z'}}{z'\,\bar{z'}} = \frac{z\,\bar{z'}}{|z'|^2}$$

riccardo.polidoro.org

Oltre alla forma algebrica, i numeri complessi hanno una forma molto più versatile:

Forma Trigonometrica di un Numero Complesso



Poniamo: • $|z| = \rho$ raggio vettore / modulo di z

• UN **argomento di z** è UNA anomalia del punto P (misura dell'angolo) rappresentante z nel piano di Gauss; si denota con $\arg z$

Al numero complesso nullo si attribuisce un qualsiasi argomento.

Spesso si sceglie l'**argomento principale**, che appartiene all'intervallo $(-\pi, \pi]$

Dunque, in forma trigonometrica $z = \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$

Esempi

• $z = 2i \Rightarrow \rho = \sqrt{0+4} = 2$; $\begin{cases} 0 = 2\cos\vartheta \\ 2 = 2\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$; $\begin{cases} \cos\vartheta = 0 \\ \mathrm{sen}\,\vartheta = 1 \end{cases}$ $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ argomento principale

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

• $z = 1+i \Rightarrow \rho = \sqrt{2}, \ \vartheta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ con la rappresentazione geometrica la determinazione è rapida!

Questa forma è utile per semplificare le operazioni:

$$\left.\begin{aligned} z &= \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta) \\ z' &= \rho'(\cos\vartheta' + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta') \end{aligned}\right\} \Rightarrow zz' = \rho\rho'\left[(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta') + i(\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta')\right] =$$

$$= \rho\rho'\left(\cos(\vartheta+\vartheta') + i\,\mathrm{sen}(\vartheta+\vartheta')\right)$$

ha per modulo il prodotto dei moduli e per un argomento dato dalla somma degli argomenti

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}\left(\cos(\vartheta-\vartheta') + i\,\mathrm{sen}(\vartheta-\vartheta')\right)$$

È molto più facile effettuare queste operazioni e ciò si riflette anche all'operazione di potenza:

$$z^n = z\cdot z\cdot\ldots\cdot z \Rightarrow \underbrace{z[\rho,\vartheta]}_{\text{"forma trigonometrica"}} \Rightarrow z^n = \underbrace{\rho^n\left(\cos(n\vartheta) + i\,\mathrm{sen}(n\vartheta)\right)}_{\text{Formula di de Moivre}}$$

vale anche per $k \in \mathbb{Z}$ (qui $n \in \mathbb{N}$)

base per parlare della RADICE n-ma

Radice n-ma

Dato un numero complesso z, cerchiamo un numero complesso w tale che $w^n = z$. Supponiamo $z \neq 0$; allora, se z è in forma trigonometrica:

$z = \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$
$w = \rho'(\cos\vartheta' + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta')$; $w^n = \rho'^n(\cos n\vartheta' + i\,\mathrm{sen}\,n\vartheta')$; $w^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} \rho'^n = \rho \\ \vartheta' = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n} \end{cases}$

$z = z' \Leftrightarrow$ modulo uguale, argomento differisce di $2k\pi$

Riccardo Polidoro .org

Dunque, $w^n = z \iff \cdot \rho' = \rho^{\frac{1}{n}}$

$\cdot \vartheta' = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}$ ⚠: $k \in \{0, \dots, n-1\}$, poiché il caso $k=n$ coincide con $k=0$: $\frac{\vartheta+2n\pi}{n} = \frac{\vartheta}{n} + 2\pi$

Dunque, esistono n determinazioni diverse della radice n-ma di un numero z.

In definitiva, si definisce radice n-ma di $z \in \mathbb{C}$, $\sqrt[n]{z}$, numero complesso w : $w^n = z$. Esistono n determinazioni della radice n-ma di z e si ottengono (se $z = [\rho, \vartheta]$) dalla formula:

$$w_k = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Esempi

- $z^2 + 1 = 0 \implies z^2 = -1 \qquad -1 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\pi \iff \vartheta = \pi$

$$w_0 = \overset{\rho=1}{\cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(\pi/2)} = i \qquad k=0$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i \qquad k=1$$

- $z^4 + 1 = 0 \implies z^4 = -1 \qquad \vartheta = \pi,\ \rho = 1$

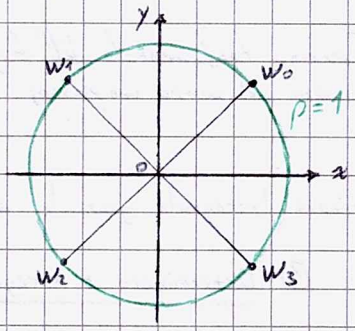
$$w_k = \rho\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right]$$ scrivila sempre

$$w_0 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$w_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$w_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$



Osservazione: Poiché l'anomalia aumenta con un'ampiezza fissa, qualsiasi che sia il numero di radici si ottengono sempre i vertici di un poligono regolare inscritto ~~nella~~ in una circonferenza di raggio ρ (nel caso di 2 radici degenera in un segmento).

Per il Teorema fondamentale dell'Algebra, se abbiamo un polinomio di grado n nel campo complesso, allora la equazione $P(z) = 0$ ha esattamente n radici ma contando ogni radice un numero di volte pari alla sua molteplicità:

Supponiamo che λ sia una radice dell'equazione algebrica, allora ($\iff$) $P(z)$ è certamente divisibile per $(z-\lambda)$. ← caratteristica

λ si dice radice di molteplicità h se $P(z)$ è divisibile per $(z-\lambda)^h$ e non divisibile per $(z-\lambda)^{h+1} \implies$ $\implies h$ è il massimo numero naturale per cui $P(z)$ è divizibile per $(z-\lambda)^h$

Esempio

$x^3 - x^2 = 0 \implies x^2(x-1) = 0$ → 0 radice di molteplicità 2; → 1 radice "semplice" (di molteplicità 1)

riccardo.polidoro.org

Sappiamo dunque risolvere equazioni nel campo complesso; per completezza, parliamo anche di esponenziali nel campo complesso:

Se $z \in \mathbb{C}$, $e^z \overset{def}{=} e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ → ricordando che $e = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow e^x = \lim_n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, otteniamo che

$$\lim_n \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \underbrace{e^x \cos y}_{\text{parte reale}} + i \underbrace{e^x \operatorname{sen} y}_{\text{coeff. dell'immaginario}}$$

Si osserva che e^z è una funzione derivabile infinite volte nel campo complesso che non è mai nulla ($\operatorname{sen} y \neq \cos y \ \forall y$); si ricorda che in $\mathbb{C}$ non ha senso parlare di positività e negatività.

Tornando alle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Se $z \in \mathbb{C}$ è una soluzione dell'equazione caratteristica associata all'omogenea, allora e^z è una soluzione nel campo complesso dell'equazione omogenea (funzione complessa in 1 variabile complessa, si ottiene in $\mathbb{R}$); strutttiamo il coniugato di z per considerare soluzioni reali:

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \qquad e^{\bar z} = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$$

$$\Rightarrow \frac{e^z + e^{\bar z}}{2} = e^x \cos y \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \frac{e^z - e^{\bar z}}{2i} = e^x \operatorname{sen} y \in \mathbb{R}$$

Formule di Eulero: si passa dall'esponenziale nel campo complesso a due funzioni reali ottenute come combinazioni lineari dell'esponenziale.

Se $P(z)$ è un polinomio a coefficienti reali e z è una radice dell'equazione $P(z)=0$, allora anche $\bar z$ è radice della stessa equazione (in un'equazione di II grado infatti si parla di 2 radici complesse coniugate).

Dal Teorema fondamentale dell'Algebra ricaviamo che se $P(z)$ è un polinomio di grado n, allora l'equazione $P(z)=0$ ha n soluzioni nel campo complesso, se si conta ogni soluzione un numero di volte pari alla sua molteplicità.

Per determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \varphi$ occorre:

1. Determinare n integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata.
2. Trovare una soluzione particolare dell'equazione completa.

1. $L(y) = 0$.

Consideriamo l'**equazione caratteristica** associata $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

- Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono soluzioni distinte reali dell'equazione caratteristica, si dimostra che la n-pla $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ è una n-pla di soluzioni dell'equazione omogenea $L(y)=0$
- Si dimostra che se $\lambda_i \in \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità h, allora le funzioni $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{h-1} e^{\lambda x}$ sono tutte soluzioni dell'equazione $L(y)=0$; ciò implica che sostituendo alla soluzione di molteplicità h queste funzioni si ottiene ancora una n-pla di soluzioni linearmente indipendenti.
- Se $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ sono soluzioni coniugate complesse dell'equazione caratteristica, allora $e^{(\alpha+i\beta)x}$ è una soluzione nel campo complesso di $L(y)=0$; sfruttando le Formule di Eulero si ottiene che $e^{\alpha x}\cos \beta x$ e $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ sono soluzioni reali:

$$z = (\alpha+i\beta)x, \quad \bar z = (\alpha - i\beta)x \Rightarrow \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}}{2} = e^{\alpha x}\cos \beta x$$

$$\Rightarrow \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i} = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

Se la molteplicità è maggiore di 1 (eq. almeno di IV grado), ovvero se $\alpha \pm i\beta$ sono soluzioni coniugate della equazione caratteristica con molteplicità k, si usano le due funzioni moltiplicate per $x, x^2, \dots, x^{k-1}$ ottenendo $2k$ soluzioni reali e distinte dell'equazione caratteristica.

riccardo.polidoro.org

Otteniamo dunque le soluzioni: $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

Esempi

Integrali generali

- $y'' - 2y' - 3y = 0$ — eq. caratt.: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm 2 \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

  Integrale generale: $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

- $y'' - 2y' + 3y = 0$ — eq. caratt.: $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{2}i$

  Integrale generale: $y(x) = c_1 e^{x\cos\sqrt{2}x} + c_2 e^{x\operatorname{sen}\sqrt{2}x}$

- $y'' - 4y' + 2y = 0$ — eq. caratt.: $\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 2$ molt. 2

  Integrale generale: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

- $y''' + 4y'' = 0$ — eq. caratt.: $\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2+4) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \text{ molt. } 2 \\ \lambda = -4 \end{cases}$

  Integrale generale: $y(x) = c_1 \underbrace{e^{0x}}_{1} + c_2 x \underbrace{e^{0x}}_{1} + c_3 e^{-4x}$

- $y''' + 2y'' + y' = 0$ — eq. caratt.: $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+2\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1)^2 = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \text{ molt. } 2 \end{cases}$

  Integrale generale: $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}$

- $y'' + 4y = 0$ — eq. caratt.: $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i$ $\quad [p = 4;\ \vartheta = \pi]$

  Integrale generale: $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$ $\quad (e^{0x})$

  Risolviamo il Problema di Cauchy di punto iniziale 0 e valori iniziali $-1, 0$, ovvero: $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$

  $$\begin{aligned} y(x) &= c_1\cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x \\ y'(x) &= -2c_1 \operatorname{sen} 2x + 2c_2 \cos 2x \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = -1 \Rightarrow c_1 = -1 \\ y'(0) = 0 \Rightarrow 2c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x) = -\cos 2x$$

- $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ — eq. caratt.: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$ molt. 2

  Integrale generale: $y(x) = c_1 (e^{0x}) \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x\cos x + c_4 x \operatorname{sen} x$

- $y^{IV} + y = 0$ — eq. caratt.: $\lambda^4 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt[4]{-1} \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$ 4 radici semplici

  Integrale generale: $y(x) = c_1 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}} + c_3 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}$

riccardo.polidoro.org

② $v(x)$ sol. $L(y)=\varphi$.

Esempi

Come sappiamo, si applica il **Metodo di Lagrange**.

- $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{1+x^2}$

coefficienti costanti, il termine noto no; ovviamente l'equazione va integrata nell'insieme di definizione di φ, che in questo caso è $\mathbb{R}$.

Eq. omogenea: $y''-2y'+y=0 \longrightarrow$ eq. caratt.: $\lambda^2-2\lambda+1=0 \iff (\lambda-1)^2=0 \iff \lambda=1$ molt. 2

Integrale generale dell'omogenea: $y(x)=c_1e^x+c_2xe^x$

Partendo dall'integrale generale dell'equazione omogenea "moltiplichiamo le soluzioni linearmente indipendenti per due soluzioni arbitrarie": posto $v(x)=\gamma_1(x)e^x+\gamma_2(x)\cdot xe^x$, determiniamo γ_1 e γ_2:

$$\begin{cases}\gamma_1'(x)e^x+\gamma_2'(x)\cdot xe^x=0\\ \gamma_1'(x)e^x+\gamma_2'(x)(xe^x+e^x)=\dfrac{e^x}{1+x^2}\end{cases}\iff\begin{cases}\gamma_1'(x)=-\gamma_2'(x)x=-\dfrac{x}{1+x^2}\\ \gamma_2'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\end{cases}$$

$$\gamma_1(x)=\int-\frac{x}{1+x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$\gamma_2(x)=\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctg x$$

$$\Rightarrow v(x)=e^x\arctg x+x\left(\log\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)e^x$$

Dunque, l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x)=e^x\left(c_1+c_2x+\arctg x+x\log 1/\sqrt{1+x^2}\right)$

⚠ È importante mantenere l'integrale generale in forma compatta, perché rende semplice la risoluzione del Problema di Cauchy!

- $y''+y=x$

eq. omogenea: $y''+y=0$; eq. caratt: $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda=\pm i$

int. gen. om: $y(x)=c_1\cos x+c_2\sen x$

Cerchiamo una soluzione particolare: $\begin{cases}\gamma_1'(x)\cos x+\gamma_2'(x)\sen x=0\\ -\gamma_1'(x)\sen x+\gamma_2'(x)\cos x=0\end{cases}$ ✗

$$W(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \sen x\\ -\sen x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2x+\sen^2x=1 \Longrightarrow \gamma_1'(x)=\begin{vmatrix}0 & \sen x\\ x & \cos x\end{vmatrix}=-x\sen x$$

$$\gamma_2'(x)=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sen x & x\end{vmatrix}=x\cos x$$

e, dunque, $\gamma_1(x)=x\cos x-\sen x$

$\gamma_2(x)=x\sen x+\cos x$

$$v(x)=x\cos^2x-\sen x\cos x+x\sen^2x+\sen x\cos x=x$$

E l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x)=c_1\cos x+c_2\sen x+x$

Ma se il termine noto fosse stato di II (polinomio) grado, c'era MOLTO PIÙ DA DIVERTIRSI; il metodo di Lagrange dunque può comportare processi particolarmente laboriosi e inefficaci. Sotto buone ipotesi, è possibile applicare metodi alternativi, che permettono di individuare soluzioni anche se col metodo si trovano $\int$ non el. integrabili.

riccardo.polidoro.org

Si distinguono diversi casi:

① Il termine noto $\varphi(x)$ è un polinomio di grado k (>1)

$L(y) = P(x)$ $\quad$ $P(x)$ polinomio di grado k $\quad$ metodo per similitudine

Si distinguono due "sotto casi":

- Un integrale particolare $v(x)$ può essere individuato tra i polinomi di grado k ($\lambda = 0$ non è soluzione dell'equazione caratteristica dell'equazione differenziale omogenea associata), allora è possibile determinarne i coefficienti imponendo che $v(x)$ sia soluzione dell'equazione differenziale completa ed applicando il **principio d'identità dei polinomi**.

- $\lambda = 0$ è una soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità m; cerchiamo dunque $v(x)$ tra i polinomi di grado $m+k$: è un polinomio del tipo $x^m \cdot P(x)$, con $P(x)$ di grado k; si applica analogamente il principio d'identità dei polinomi.

Principio d'identità dei polinomi: due polinomi sono uguali se e soltanto se sono di ugual grado e i coefficienti corrispondenti sono simili.

Esempi

$y'' + y' = x^2 - x + 1$ $\quad$ eq. omogenea: $y'' + y' = 0$, eq. caratt.: $\lambda^2 + \lambda = 0 \leftarrow \begin{matrix} \lambda = 0 \leftarrow (\text{molt. } 1) \\ \lambda = -1 \end{matrix}$ $\quad \curvearrowright x^1(P(x))$

$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$ $\quad$ int. gen. eq. omog.

Cerchiamo una soluzione particolare $v(x)$ data da $x(ax^2+bx+1) = ax^3 + bx^2 + cx$

$v'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$v''(x) = 6ax + 2b$ $\Rightarrow$ $6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c = x^2 - x + 1$

Per il principio d'identità dei polinomi: $\begin{cases} 3a = 1 \\ 6a + 2b = -1 \\ 2b + c = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a = 1/3 \\ b = -3/2 \\ c = 5/2 \end{cases}$

E, dunque, $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + c_1 + c_2 e^x$

Teorema sul Wronskiano - DIMOSTRAZIONE

Abbiamo ora gli strumenti necessari per dimostrare il Teorema sul Wronskiano:

n soluzioni dell'equazione lineare omogenea sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow W(x) \neq 0 \ \forall x \in I$
[dipendenti $\Leftrightarrow W(x) = 0 \ \forall x \in I$]

Ricordando la scrittura di un'equazione lineare omogenea $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) = 0$, procediamo:

- $y_1, \dots, y_n$ linearmente dipendenti $\Rightarrow W(x) = 0 \ \forall x \in I$

Per ipotesi esiste una n-pla di scalari non tutti nulli tale che $\lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \ \forall x \in I$; e si ha che:

$$\lambda_1 y_1'(x) + \dots + \lambda_n y_n'(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

Ciò ci dice che il sistema lineare $\begin{cases} c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \\ c_1 y_1'(x) + \dots + c_n y_n'(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$ ver. questa $\Rightarrow$ ver. questa $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ ver. questa

ha per soluzione la n-pla $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq \underline{0}$, che ha necessariamente il determinante dei coefficienti $= 0 \Rightarrow W(x) = 0 \ \forall x \in I$

riccardo.polidoro.org

- Se esiste un $x_0 \in I$ tale che $W(x_0)=0$, allora $y_1, \dots, y_n$ è una n-pla di soluzioni linearmente dipendenti

Consideriamo il sistema lineare $\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + y_n^{(n-1)}(x_0) \cdot c_n = 0 \end{cases}$

esso ha ~~per coefficienti~~ come determinante dei coefficienti $W(x_0) = 0$; dunque esiste una soluzione particolare non nulla del sistema.

$\exists \overline{c_1}, \dots, \overline{c_n}$ n-pla non nulla che risolve il sistema $\Rightarrow$ la funzione $\overline{c_1} y_1 + \dots + \overline{c_n} y_n$ soddisfa il Problema di Cauchy di punto iniziale x_0 e valori iniziali tutti nulli; per il Teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali lineari si ottiene che $\overline{c_1} y_1 + \dots + \overline{c_n} y_n = 0 \ \forall x \in I$, dimostrando l'asserto.

Ritornando ai metodi alternativi al metodo di Lagrange per la risoluzione di equazioni differenziali lineari:

② Il termine noto $\varphi(x)$ è un polinomio di grado k moltiplicato per un esponenziale $e^{\alpha x}$:

$L(y) = e^{\alpha x} P(x)$, $P(x)$ di grado k — Osservazione: per $\alpha = 0$ si ottiene il caso ①

Consideriamo una "soluzione" $v(x)$ costruita, analogamente al caso ①, come segue:

$v(x) = e^{\alpha x} q(x)$ — $q(x)$ è un polinomio: • di grado k se $\lambda = \alpha$ (analogo alla valutazione dell'osservazione) NON è soluzione dell'equazione caratteristica

Dunque:

- $v(x) = e^{\alpha x} q(x)$ se $\lambda = \alpha$ non è sol. dell'eq. caratt. • di grado $m+k$ se $\lambda = \alpha$ è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità m

- $v(x) = e^{\alpha x} x^m q(x)$ se $\lambda = \alpha$ è sol. dell'eq. caratt. di molteplicità m: ciò perché nella derivazione si hanno informazioni sufficienti per determinare TUTTE le costanti del polinomio che vogliamo determinare.

Osservazione: Se $\lambda = \alpha$ è soluzione dell'equazione caratteristica allora $e^{\alpha x}$ è una soluzione dell'equazione lineare omogenea $\Rightarrow$ se nell'integrale dell'equazione lineare omogenea associata è presente $e^{\alpha x}$, si considera il secondo sottocaso, altrimenti il primo.

Esempio

$y''' - y' = e^{2x} x$ — è un polinomio di grado 1

eq. omog: $y''' - y' = 0 \longrightarrow \lambda^3 - \lambda = 0 \Leftarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$ $\alpha = 2$ non sol. caratteristica

$v(x) = (ax+b) e^{2x}$

$v'(x) = 2e^{2x}(ax+b) + a e^{2x} = e^{2x}(2ax + 2b + a)$

$v''(x) = 2e^{2x}(2ax+2b+a) + e^{2x}(2a) = e^{2x}(4ax + 4b + 4a)$

$v'''(x) = 2e^{2x}(4ax+4b+4a) + e^{2x}(4a) = e^{2x}(8ax + 8b + 12a)$

Imponiamo che $v(x)$ sia soluzione $\Rightarrow$ $v'''(x) + v'(x) = e^{2x}(6ax + 6b + 11a) = \overbrace{e^{2x} \cdot x}^{\varphi}$

Ne segue che (semplificando e^{2x}): $6ax + 6b + 11a = e^{2x} \cdot x \iff \begin{cases} a = 1/6 \\ b = -\frac{11}{36} \end{cases}$

Riccardo Polidoro

Dunque, l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = \underbrace{c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}}_{\text{eq. caratteristica} \Rightarrow \text{int. gen. omogenea}} + \underbrace{e^{2x}\left(\frac{1}{6}x - \frac{11}{36}\right)}_{v(x)\ \text{sol. part.}}$$

⚠ L'applicazione del metodo di Lagrange avrebbe prodotto lunghi calcoli; questo è un metodo molto conveniente!

- $y'' - y = e^{x}(x+2)$

eq. omogenea: $y'' - y = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$ ⚠ $\alpha = 1$, $\lambda = 1$ è soluzione!

$v(x) = x(ax+b)e^{x} = (ax^2+bx)e^{x}$

⚠ La considerazione di un trinomio di II grado aggiunge una costante $\Rightarrow$ più conti, lavoro inutile!

Oss: se $v(x) = e^{x}(ax+b)$:

$v'(x) = e^{x}(ax+b+a)$

$v''(x) = e^{x}(ax+b+2a)$

$v'' - v = e^{x}(-2a) = e^{x}(x+2)$ non si hanno informazioni sufficienti! moltiplicando per x^m siamo certi che nelle derivazioni si conservano le costanti.

$v'(x) = e^{x}(ax^2+bx+2ax+b)$

$v''(x) = e^{x}(ax^2+(2a+b)x+b+2ax+2a+b) = e^{x}(ax^2+(4a+b)x+2b)$

Imponendo che $v(x)$ sia soluzione:

$$v''(x) - v(x) = \underbrace{e^{x}(4ax+2b+2a)}_{\text{ottenuto raccogliendo } e^{x} \text{ da } v''-v} = e^{x}(x+2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dunque, otteniamo $4ax + 2b + 2a = x + 2$ e, per il principio d'identità dei polinomi: $\begin{cases} a = 1/4 \\ 2b + \frac{1}{2} = 2 \end{cases} \iff b = -3/4$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + e^{x}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x\right)$

Volendo risolvere il Problema di Cauchy $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$, si parte dall'integrale generale dell'equazione completa, si deriva (per la seconda condizione) e individuare c_1 e c_2.

③ Il termine noto $\varphi(x)$ è dato da una combinazione di seni e coseni per dei polinomi e l'esponenziale:

$$L(y) = e^{\alpha x}\left(\underbrace{P_1(x)}_{\text{grado } h}\cos\beta x + \underbrace{P_2(x)}_{\text{grado } k}\operatorname{sen}\beta x\right)$$

Osservazione: Se $\beta = 0$ si ottiene il caso ②

Costruiamo $v(x) = e^{\alpha x}\left(q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\operatorname{sen}\beta x\right)$

con grado di $q_1, q_2 = \max\{h, k\}$ se $\alpha \pm i\beta$ NON è soluzione dell'equazione caratteristica ($\Rightarrow$ non c'è $e^{\alpha x}\cos\beta x$ nell'int. gen. dell'omogenea)

Altrimenti, si moltiplica per x^m, con m molteplicità di $\alpha \pm i\beta$ come soluzione dell'equazione caratteristica.

⚠: Quando uno dei due tra seno e coseno non sono presenti nell'equazione, bisogna comunque impostare $v(x)$ con entrambe le funzioni trigonometriche, altrimenti si potrebbero non avere condizioni a sufficienza per la determinazione dell'integrale generale dell'equazione completa.

riccardo.polidoro.org

Esempi

$y'' + 3y' + 2y = -\operatorname{sen}x - 2\cos x$ $\quad \alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow$ bisogna vedere se $\pm i$ risolvono l'eq. caratt.

polinomi di grado 0

eq. omogenea: $y'' + 3y' + 2y = 0 \to \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

$v(x) = a\cos x + b\operatorname{sen}x$ $\Longrightarrow$ Imponiamo che $v(x)$ risolva l'equazione completa:

$v'(x) = -a\operatorname{sen}x + b\cos x$

$v''(x) = -a\cos x - b\operatorname{sen}x$

$v'' + 3v' + 2v = \cos x(-a + 3b + 2a) + \operatorname{sen}x(-b - 3a + 2b) \overset{\text{sol.}}{=} \operatorname{sen}x - 2\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff$

[Oss: è un'uguaglianza trigonometrica!]

$$\iff \begin{cases} a + 3b = -2 \\ b - 3a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 + 10a = -2 \\ b = 1 + 3a \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1/2 \\ a = -1/2 \end{cases}$$

E quindi:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{sen}x)$$

- $y'' - y' = \operatorname{sen}2x$

non compare il coseno, ma bisogna impostare il problema allo stesso modo!

eq. omogenea: $y'' + y' = 0 \to \lambda^2 - \lambda = 0 \overset{0}{\underset{1}{\nearrow}}$

- $v(x) = a\cos 2x + b\operatorname{sen}2x$
- $v'(x) = -2a\operatorname{sen}2x + 2b\cos 2x$
- $v''(x) = -4a\cos 2x - 4b\operatorname{sen}2x$

$\Longrightarrow \cos 2x(-4a - 2b) + \operatorname{sen}2x(-4b + 2a) = \operatorname{sen}2x \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \iff$

$$\iff \begin{cases} -4b + 2a = 1 \\ -4a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4b - b = 1 \\ 4a = -2b \end{cases} ; \begin{cases} b = -1/5 \\ a = 1/10 \end{cases}$$

Int. gen. $y(x) = c_1 + c_2 e^x + \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}2x$

si osservi che la soluzione contiene sia seno che coseno!

- $y'' + y = x\cos x$ $\quad \alpha = 0, \beta = 1$

omogenea: $y'' + y = 0 \to \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ ⚠

int. gen. omogenea: $y(x) = c_1\operatorname{sen}x + c_2\cos x$

- $v(x) = \overbrace{(ax + b)x}(\cos x + (cx^2 + dx)\operatorname{sen}x$

i polinomi di primo grado non danno informazioni per determinare i coefficienti!

- $v'(x) = -(ax^2 + bx)\operatorname{sen}x + (2ax + b)\cos x + (cx^2 + dx)\cos x + (2cx + d)\operatorname{sen}x =$

$= \cos x(2ax + b + cx^2 + dx) + \operatorname{sen}x(-ax^2 - bx + 2cx + d)$

- $v''(x) = -\operatorname{sen}x(-2ax - b - cx^2 - dx - 2ax - b + 2c) + \cos x(2a + 2cx + d - ax^2 - bx - 2cx + d)$ $\quad [\dots]$

- $e^x\cos x = y'' + y$ $\quad \alpha = 1, \beta = 1$

- $v(x) = e^x(a\cos x + b\operatorname{sen}x)$
- $v'(x) = e^x(a\cos x + b\operatorname{sen}x) + e^x(-a\operatorname{sen}x + b\cos x)$
- $v''(x) = e^x(a\cos x + b\operatorname{sen}x) + e^x(-a\operatorname{sen}x + b\cos x) + e^x(-a\operatorname{sen}x + b\cos x) + e^x(-a\cos x - b\operatorname{sen}x) = e^x(\cos x(2b) + \operatorname{sen}x(-2a))$

$$\Rightarrow e^x((2b + a)\cos x + (b - 2a)\operatorname{sen}x) = e^x\cos x \iff \begin{cases} 2b + a = 1 \\ b - 2a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/5 \\ b = 2/5 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1\operatorname{sen}x + c_2\cos x + e^x\left(\frac{\cos x}{5} + \frac{2\operatorname{sen}x}{5}\right)$$

riccardo.polidoro.org

• $y'' - y = x\,\text{sen}x + \cos x$

grado 1, grado 0

omogenea: $y'' - y = 0 \rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$

• $v(x) = (ax+b)\,\text{sen}x + (cx+d)\cos x$

• $v'(x) = a\,\text{sen}x + (ax+b)\cos x + c\cos x - (cx+d)\,\text{sen}x = \cos x\,(ax+b+c) + \text{sen}x\,(a-cx-d)$

• $v''(x) = -\text{sen}x\,(ax+b+c) + a\cos x + \cos x\,(a-cx-d) - c\,\text{sen}x = \cos x\,(2a-cx-d) + \text{sen}x\,(-ax-b-2c)$

$v(x)$ è soluzione $\Rightarrow v''(x) - v(x) = \cos x\,(2a-2cx-2d) + \text{sen}x\,(-2ax+2b-2c) = x\,\text{sen}x + \cos x \iff$

$$\iff \begin{cases} -2c = 0 \iff c = 0 \\ 2a - 2d = 1 \iff d = -1 \\ -2a = 1 \iff a = -1/2 \\ -2b - 2c = 0 \iff b = 0 \end{cases}$$

integrale generale: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{x}{2}\text{sen}x - \cos x$

Termini in risonanza - Principio di sovrapposizione

vale anche per eq. a coefficienti non costanti

Se $L(y) = \varphi_1 + \varphi_2$:

Se v_1 è soluzione dell'equazione $L(y) = \varphi_1$ e v_2 è soluzione dell'equazione $L(y) = \varphi_2$, allora (essendo L un operatore lineare):

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = \varphi_1 + \varphi_2$$

Esempio

$y'' + 2y' = e^x - x$

Per la linearità sappiamo che l'integrale generale può essere trovato "spezzando" l'equazione in due equazioni differenziali con termini noti diversi.

Int. gen omogenea: $y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}$ (eq. caratt.: $\lambda^2 + 2\lambda = 0$)

① $y'' + 2y' = e^x$

$v_1(x) = a e^x \Rightarrow v_1'(x) = a e^x \Rightarrow v''(x) = a e^x$

$3a e^x = e^x \ \forall x \in \mathbb{R} \iff a = 1/3$

② $y'' + 2y' = -x$ ⚠ $\lambda = 0$ è soluzione! occorre un polinomio di II grado

$v_2(x) = ax^2 + bx \Rightarrow v_2'(x) = 2ax + b \Rightarrow v_2''(x) = 2a$

$$2a + 4ax + 2b = -x \ \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a = -1/4 \\ b = 1/4 \end{cases}$$

Dunque, $y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{e^x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$

riccardo.polidoro.org

Precisazione

$y'' + 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$

⚠ NON È UN POLINOMIO ⇒ NON È UN CASO NOTEVOLE!

$\left[\frac{x^2}{e^x} = e^{-x}\cdot x^2 \text{ sarebbe stato un caso notevole}\right]$

Si applica il metodo di Lagrange

Eq. caratteristica: $\lambda^2+2\lambda+1=0 \iff \lambda=1$ molteplicità 2 ⇒ int. omog: $y(x)=c_1e^x+c_2xe^x$

$v(x)=\gamma_1(x)e^x+\gamma_2(x)xe^x$

$$\begin{cases}\gamma_1'(x)e^x+\gamma_2'(x)xe^x=0\\ \gamma_1'(x)e^x+\gamma_2'(x)e^x+\gamma_2'(x)xe^x=\frac{e^x}{x^2}\end{cases} \iff \begin{cases}\gamma_1'(x)=-\gamma_2'(x)\cdot x\\ \gamma_2'(x)=1/x^2\end{cases} \iff \begin{cases}\gamma_1'(x)=-1/x\\ \gamma_2'(x)=1/x^2\end{cases}$$

Dunque, $\gamma_2(x)=-1/x$; $\gamma_1(x)=-\log|x|$ (tecnicamente va risolta negli intervalli $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$)

$\hookrightarrow v(x)=-\log|x|\,e^x-e^x$

$y(x)=e^x(c_1+c_2x-\log|x|-1)$

Equazioni differenziali a Variabili Separabili

(non lineari; del primo ordine)

Sono equazioni del tipo:

$$y'=f(x)\cdot g(y)$$

Se $g(y)=y$ si ottiene un'equazione lineare del I ordine (caso particolare!)

Con f, g funzioni definite in due aperti di $\mathbb{R}$ (contengono intervalli) entrambe continue

Esempio

$y'=3\sqrt[3]{y^2}$ $\qquad f(x)=1,\ g(y)=3\sqrt[3]{y^2}$ entrambe definite in $\mathbb{R}$

La funzione identicamente nulla $y(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ è certamente soluzione; la scartiamo per calcolare le altre:

$$\frac{y'(x)}{3\sqrt[3]{y^2(x)}}=1 \iff \int\frac{y'(x)}{3\sqrt[3]{y^2(x)}}dx=x+c_1 \iff y(x)^{1/3}=x+c_1$$

$$\int y^{-2/3}=\frac{y^{-2/3+1}}{-2/3+1}=\frac{y^{\frac{1}{3}}}{1/3}$$

$y(x)$ funzione biunivoca: si può trasformare questa forma implicita dell'integrale generale in quella esplicita (se non è detto che sia biunivoca bisogna fare attenzione!)

$\Rightarrow y(x)=(x+c_1)^3$

Osservazione: Il problema di Cauchy di valore iniziale 0 ha infinite soluzioni, qualsiasi sia il punto iniziale!

es: $y(0)=0$ ha la soluzione nulla e la soluzione x^3; ma Peano dimostrò che ne esistono infinite: considerata la funzione che vale 0 in un intervallo $[-a,a]$ e si raccorda in maniera liscia con le curve $(x-a)^3$, $(x+a)^3$ si ottengono soluzioni $\forall a$!

Dunque, non vale il Teorema di Esistenza e Unicità: g deve essere DERIVABILE CON DERIVATA LIMITATA: si ottiene un teorema di esistenza e unicità ma a CARATTERE LOCALE: variando il punto iniziale del Problema di Cauchy le soluzioni sono uniche, ma non è detto che siano tutte definite in uno stesso insieme di definizione! Ne segue inoltre che le costanti possono non variare in tutto $\mathbb{R}$ ⇒ $y(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ non rientra nelle soluzioni totali, ha carattere anch'esso locale.

riccardo.polidoro.org

Dimostrazioni in sospeso

- Ricordiamo che una n-pla di soluzioni linearmente indipendenti è linearmente indipendente quando il WRONSKIANO di queste n soluzioni è diverso da 0.

La matrice più semplice con determinante diverso da 0 è la matrice identità I; tentiamo di costruire la ~~Wronskiano~~ n-pla di soluzioni tale che il Wronskiano sia di questo tipo:

$$x_0 \in I \; ; \quad W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Vogliamo che la diagonale abbia 1 e gli altri elementi $=0$; costruiamo opportunamente n problemi di Cauchy:

$$\underbrace{\begin{cases} L(y)=0 \\ y(x_0)=1 \\ y'(x_0)=0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}}_{y_1(x)}, \quad \underbrace{\begin{cases} L(y)=0 \\ y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}}_{y_2(x)} \quad \dots \quad \underbrace{\begin{cases} L(y)=0 \\ y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=0 \\ \dots \\ y^{(n-2)}(x_0)=0 \\ y^{(n-1)}(x_0)=1 \end{cases}}_{y_n(x)} \implies W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(Se l'eq. ha coeff. continui, il Problema di Cauchy ha 1 sola soluzione!)

Ne segue che n soluzioni così costruite sono certamente linearmente indipendenti, e sappiamo che esistono; sostituendo ad $=1$ un numero $\alpha \neq 0$ si osserva che esistono INFINITE soluzioni linearmente indipendenti di un'eq. diff., non solo n!

- L'integrale generale dell'equazione omogenea $L(y)=0$ è combinazione lineare di n soluzioni linearmente indipendenti:

$y_1, \dots, y_n$ dunque riescono a generare tutte e sole le soluzioni dell'equazione lineare omogenea; inoltre si osserva che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale di ordine n costituiscono un sottospazio, poiché ~~somma di soluzioni~~ l'insieme è chiuso rispetto a somma e prodotto per uno scalare, contiene il vettore nullo (sol. ident. nulla). Basta dimostrare che abbia dimensione pari all'ordine dell'equazione.

Se $y_1, \dots, y_n$ sono soluzioni dell'equazione $L(y)=0$ linearmente indipendenti, allora comunque fissiamo una soluzione $u(x)$ di $L(y)=0$,
Esiste un'unica n-pla $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ tale che:

$$u = \bar{c}_1 y_1 + \dots + \bar{c}_n y_n \implies y_1, \dots, y_n \text{ è un sist. di generatori del sottospazio delle sol.}$$

Dim

Poniamo $u \neq$ soluzione identicamente nulla (caso banale: $\bar{c}_1 = \dots = \bar{c}_n = 0$); sia $x_0 \in I$.
Allora il sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \dots + \lambda_n y_n(x_0) = u(x_0) \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \dots + \lambda_n y_n'(x_0) = u'(x_0) \\ \dots \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots \lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0) = u^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

sistema lineare (non omogeneo: se $u(x_0)$ e derivate $=0$ sarebbe la f identicamente nulla $\Rightarrow$ già vista) nelle incognite $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e con determinante dei coefficienti uguale a $W(x_0)$, NON NULLO PER IPOTESI: $y_1, \dots, y_n$ sono linearmente indipendenti.

Il sistema dunque è di Cramer $\Rightarrow$ ammette una e una sola soluzione $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$.
Osservando che $u(x)$ e $\bar{c}_1 y_1(x) + \dots + \bar{c}_n y_n(x)$ sono entrambe sol. dell'equazione lineare omogenea (u per ipotesi, l'altra come c. lin. di soluzioni lin. ind.) e soddisfano lo stesso problema di Cauchy di punto iniziale x_0. Per il teorema di esistenza e unicità devono coincidere in tutto l'intervallo I □

ricardo.polidoro.org

Esercizi: Eq. Var. separabili

$y' = 2xy^2$ — Le soluzioni: $y(x) = 0$ sono certamente soluzioni dell'equazione differenziale (dette soluzioni stazionarie)

$y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione stazionaria; la scartiamo:

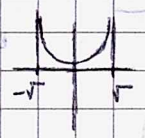
$$y(x) \neq 0 \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = \int 2x\,dx + c_1 \iff -\frac{1}{y(x)} = x^2 + c$$ forma implicita dell'integrale generale.

Se $y(x) > 0$: $-1/y(x) < 0$, $x^2 + c < 0 \iff c < 0, |c| > |x^2|$ $\Rightarrow$ si distinguono più casi!

- Se $y(x) > 0$ (cerchiamo soluzioni positive), essa non può provenire da $c_1 \geq 0$.

  Per $c_1 < 0$, avremo soluzione $y(x)$ definita in $]-\sqrt{-c_1}, \sqrt{-c_1}[$ $(x^2 + c_1 < 0 \ ; \ c_1 < 0)$

  Ne segue che, in questo caso, $y(x) = \frac{-1}{x^2 + c_1}$:



- Se $y(x) < 0$: c_1 può essere positivo, negativo o nullo $\Rightarrow c_1 \in \mathbb{R}$

  $c_1 = 0 \Rightarrow y(x) = -1/x^2$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ⚠ Le soluzioni vanno definite in intervalli, non è corretta l'UNIONE

  $c_1 > 0 \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x^2 + c_1}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

  $c_1 < 0 \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x^2 + c_1}$ $\quad \forall x \in]-\infty, -\sqrt{-c_1}[\cup]\sqrt{-c_1}, +\infty[$ $\quad (x^2 + c_1 > 0)$

Non si può dunque parlare, come nelle equazioni lineari, di insieme delle soluzioni (intervallo di definizione dei coefficienti dell'equazione omogenea); possiamo dunque esplicitare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + c_1}$$

⚠ In generale non è detto! Ad esempio, senza la discussione avremmo avuto soluzioni anche per $y(x) > 0$ e $c_1 > 0$ $\Rightarrow$ l'espressione delle soluzioni è questa, ma bisogna analizzare c_1.

$x^2 + c_1 \neq 0$ SEMPRE poiché è uguale a $-1/y(x)$ che non può annullarsi $\Rightarrow$ gli insiemi di definizione sono sempre aperti

- $y' = e^x \sqrt{1 - y^2}$ $\quad x \in \mathbb{R}, \ y \in [-1, 1]$

  sol. stazionarie: $y(x) = \pm 1$, $y(x) = -1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Le scartiamo $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{y'}{\sqrt{1 - y^2}}\,dx = e^x + c_1 \iff \arcsen y(x) = e^x + c_1$$

Risulta dunque $-\frac{\pi}{2} < e^x + c_1 < \frac{\pi}{2}$ per poter definire $\arcsen y(x)$.

- $c_1 \geq \frac{\pi}{2}$ Non si hanno soluzioni (e^x sempre > 0)
- $c_1 < \pi/2$ Si hanno soluzioni definite in:

  $]-\infty, \log(\frac{\pi}{2} - c_1)[$ se $-\pi/2 < c_1 < \pi/2$ $\quad (e^x + c_1 < \pi/2)$

  $]\log(-\frac{\pi}{2} - c_1), \log(\frac{\pi}{2} - c_1)[$ se $c_1 < -\frac{\pi}{2}$ $\quad (-\frac{\pi}{2} - c_1 > 0)$

Possiamo esplicitare $y(x) = \operatorname{sen}(e^x + c_1)$ MA SOLO CON LE LIMITAZIONI APPENA VALUTATE !!!!

riccardo.polidoro.org

Teorema di Schwartz

invertibilità dell'ordine di derivazione

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte (sia rispetto a $x_i x_j$ che a $x_j x_i$, con $i \neq j$) in un intorno di $\underline{x_0}$ contenuto in X (con $\underline{x_0} \in \mathring{X}$), e se tali derivate sono continue in $\underline{x_0}$, allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x_0}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x_0})$$

E dunque è possibile invertire l'ordine di derivazione in $\underline{x_0}$.

Più in generale, se $f \in C^2(X)$, con X aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$, è possibile invertire l'ordine di derivazione delle derivate seconde miste in tutti i punti di X. Ciò perché le derivate seconde esistono e sono continue in tutto $X \Rightarrow$ esistono e sono differenziabili le derivate prime [...].

Supponiamo che esistano finite derivate seconde rispetto a tutte le coppie di variabili della funzione; organizzando dette derivate in una particolare matrice, detta **matrice Hessiana di f in $\underline{x_0}$** (che, nelle ipotesi del Teorema di Schwartz, è una matrice simmetrica), il ~~calcolo del~~ suo determinante è detto **Hessiano** di f in $\underline{x_0}$, si denota con $H(\underline{x_0})$ e viene utilizzato nello studio dei massimi e minimi relativi di funzioni in più variabili.

$$\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\underline{x_0}) & f_{x_1x_2}(\underline{x_0}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\underline{x_0}) \\ f_{x_2x_1}(\underline{x_0}) & f_{x_2x_2}(\underline{x_0}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\underline{x_0}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1}(\underline{x_0}) & f_{x_nx_2}(\underline{x_0}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\underline{x_0}) \end{pmatrix}$$

Ad esempio, per $n=2$ $\quad H(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$ che, se la f è di classe C^2, è ottenuto da una matrice simmetrica $\Rightarrow H(x_0,y_0) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$

Le derivate di ordine superiore a 2 si definiscono in maniera analoga e, se m è un intero positivo, una funzione di n variabili potrà avere n^m derivate m-sime.

Una funzione f si dice di classe $C^m(X)$, con X aperto di $\mathbb{R}^n$, se f è derivabile m volte in X rispetto a tutte le variabili, con derivate tutte continue in X.

Formula di Taylor

(ordine m, punto iniziale x_0)

Serve ad approssimare le funzioni con polinomi per semplificare funzioni complesse.

formula generale (resto di Peano):

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, X aperto e $f \in C^m(X)$. Allora esiste un polinomio $P(\underline{x})$ di grado $\leq m$ tale che:

$$f(\underline{x}) = P(\underline{x}) + o(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|^m) \quad \forall \underline{x} \in X, \text{ con } P(\underline{x_0}) = f(\underline{x_0})$$

Formula di Taylor con resto di Lagrange

(ordine 1, punto iniziale $\underline{x_0}$)

La formula di Taylor con resto di Lagrange per le funzioni reali di una variabile reale ha una particolarità: il resto di Lagrange esplicita il resto, permettendo applicazioni pratiche più comode.

Prendiamo una funzione di classe $C^2(I)$, e sia $h: t \in I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sia $t_0 \in I$, allora comunque prendiamo $t \neq t_0$ nell'intervallo I, esiste un punto τ interno all'intervallo di estremi t e t_0 tale che:

$$h(t) = h(t_0) + h'(t_0)(t-t_0) + \underbrace{\frac{1}{2!} h''(\tau)(t-t_0)^2}$$

Resto di Lagrange: ha la forma del polinomio di Taylor ma calcolata in un punto interno.
⚠ NON È UN POLINOMIO: τ dipende da t!

riccardo.polidoro.org

Scriviamo ora la formula in generale: Sia $f \in C^2(X)$ con X aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\underline{x_0} \in X$.
Allora, per ogni punto $\underline{x}$ di X diverso da $\underline{x_0}$ tale che il segmento $\overline{\underline{x_0}\,\underline{x}}$ sia tutto contenuto in X, esiste un punto $\underline{\xi}$ interno al segmento tale che:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \nabla f(\underline{x_0}) \cdot (\underline{x} - \underline{x_0}) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{\xi})\,(x_i - x_i^0)\right]^{[2]}$$

↳ Quadrato Simbolico: non si svolge calcolando i quadrati delle derivate ma calcolando le derivate seconde; si calcola invece il quadrato nei termini algebrici $(x_i - x_0^i)$:

Quadrato simbolico
esempio: $f_{x_1x_1}(\underline{\xi})\,(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + f_{x_nx_n}(\underline{\xi})\,(x_n - x_n^0)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x_i x_k}(\underline{\xi})(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) + \dots +$

Nel caso in cui $n=2$,

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(c_1,c_2)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(c_1,c_2)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]$$

Dimostrazione

Sia S il segmento di estremi (x,y) e (x_0,y_0), e descriviamolo attraverso la funzione vettoriale φ:

$$\varphi : t \in [0,1] \to (x_0 + t(x-x_0),\ y_0 + t(y-y_0)) \in S \qquad \varphi \in C^\infty(I)$$

Ne segue che certamente $\varphi \in C^2([0,1])$; $f \in C^2(X)$ per ipotesi $\Rightarrow$ la funzione composta $\psi : t \in [0,1] \to \psi(t) = (f \circ \varphi)(t)$ è una funzione reale di una variabile reale e $\psi \in C^2([0,1])$: per il teorema di differenziabilità delle funzioni composte ψ è certamente derivabile 2 volte; calcoliamo le derivate:

$$* \quad \psi'(t) = f_x(\varphi(t))(x-x_0) + f_y(\varphi(t))(y-y_0) \qquad \forall t \in [0,1] \quad \left(\equiv \nabla f(\varphi(t))(\underline{P} - \underline{P_0})\right)$$

(derivata della componente di $\underline{\varphi}$ rispetto a t $\in I[I]$)

(→ classe C^2 $\Rightarrow$ vale il Teorema di Schwartz)

$$* \quad \psi''(t) = f_{xx}(\varphi(t))(x-x_0)^2 + f_{xy}(\varphi(t))(x-x_0)(y-y_0) + f_{yx}(\varphi(t))(y-y_0)(x-x_0) + f_{yy}(\varphi(t))(y-y_0)^2 =$$

(derivata $[\dots]\cdot(x-x_0)$, costante rispetto a t $\Rightarrow (x-x_0)^2$)

$$= \left[f_x(\varphi(t))(x-x_0) + f_y(\varphi(t))(y-y_0)\right]^{[2]} \qquad \square$$

Il risultato si ottiene applicando a ψ la formula di Taylor con resto di Lagrange (con $t_0 = 0$, $t = 1$):

$$\exists \tau \in]0,1[: \quad \psi(1) = \psi(0)\cdot(1-0) + \psi'(0)\cdot(1-0) + \frac{1}{2!}\psi''(t)\,(1-0)$$

$$f(\varphi(1)) \quad f(\varphi(0)) \quad * \quad * \ \underline{\xi} = \varphi(\tau)$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(\underline{x_0})(\underline{x} - \underline{x_0}) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{\xi})\,(x_i - x_i^0)\right]^{[2]} \qquad (\text{in } \mathbb{R}^2) \qquad \square$$

riccardo.polidoro.org

Studio di funzioni scalari ①

Premessa: richiami di Analisi I

Per studiare gli estremi relativi in $\mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$ è importante ricordarne le definizioni in $\mathbb{R}$, da cui per estensione possono ricavarsi le altre.

Ragioniamo sui minimi e i punti di minimo; analoghe considerazioni definiranno massimi e punti di massimo.

Sia $h(t) : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

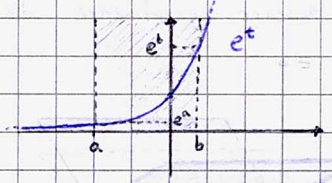
- MINIMO di h: $\min_{t \in X} h(t) \overset{\text{def}}{=} \min \{ h(t), t \in X \}$ nel CODOMINIO
- PUNTO DI MINIMO di h: $t_0 \in X$: $h(t_0) = \min_{t \in X} h(t)$ nell'insieme di DEFINIZIONE o una sua restrizione opportuna. In generale NON È UNICO!

Esempi

- $h(t) = e^t$ non ha né minimo né massimo; ammette estremo inferiore reale.

  Limitandoci ad un insieme compatto $[a,b]$, vale il Teorema di Weierstrass; la funzione ristretta ammette minimo e massimo (è una condizione SUFFICIENTE, non necessaria!)

  $\min_{t \in [a,b]} e^t = e^a$; $\max_{t \in [a,b]} e^t = e^b$; a è PUNTO DI MINIMO



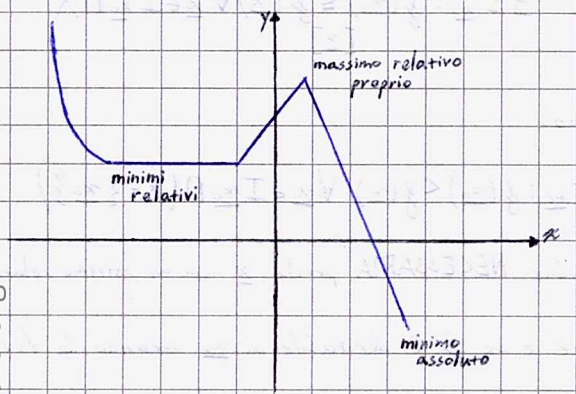
- $h(t) = \operatorname{sen} t$ $\min_{\mathbb{R}} \operatorname{sen} t = -1$; $\max_{\mathbb{R}} \operatorname{sen} t = 1$ MA ci sono INFINITI punti di minimo [massimo]!

~~In altre parole:~~ Introduciamo ora gli estremi RELATIVI:

$t_0 \in X$ si dice punto di minimo relativo per h in X se $\exists I_{t_0} : h(t_0) \leq h(t) \quad \forall t \in I_{t_0} \cap X$

$t_0 \in X$ si dice punto di minimo relativo **proprio** (o in senso stretto) se $\exists I_{t_0} : h(t_0) < h(t) \quad \forall t \in I_{t_0} \cap X, t \neq t_0$

Se t_0 è un punto di minimo (assoluto) per h in $X \implies$ / $\not\Longleftarrow$ t_0 è un punto di minimo relativo



Richiamiamo ora il Teorema di Fermat:

Se $t_0 \in \mathring{X}$ è un punto di estremo relativo in X e se h è derivabile in t_0, allora $h'(t_0) = 0$

Dim

Se $t_0 \in \mathring{X}$ è un minimo relativo per h, $\exists I_{t_0} \subseteq X : h(t_0) \leq h(t) \quad \forall t \in I_{t_0}$

Ne segue che: $\forall t \in]t_0, t_0 + \delta[$, $\dfrac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \geq 0$

$\forall t \in]t_0 - \delta, t_0[$, $\dfrac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \leq 0$

Il ragionamento sul rapporto incrementale destro e sinistro è possibile perché ragioniamo per ipotesi in PUNTI INTERNI a X

riccardo.polidoro.org

Strutturiamo questo risultato e applichiamo il Teorema del Confronto:

$h'_+(t_0) \geq 0$
$h'_-(t_0) \leq 0$; essendo h derivabile in t_0 per ipotesi, $\lim_{t \to t_0} h'_+(t) = h'_+(t_0) = h'_-(t_0) = h'(t_0) = 0$ □

Si sottolinea che ciò è possibile solo nei punti interni.
Inoltre, la condizione è NECESSARIA, ma non sufficiente: considerando $h(t) = t^3$ ad esempio si ha che la derivata è nulla per $t = 0$ ma il punto non è un estremo relativo.

In Analisi I, lo studio degli estremi relativi di una funzione dipendeva dallo studio del segno della derivata prima. Una condizione che può essere utilizzata prescindendo dalla monotonia è lo studio delle derivate di ordine superiore:

Se h è derivabile in I e derivabile 2 volte in $t_0 \in I$, e se $h'(t_0) = 0$ e $h''(t_0) < 0$ [> 0], allora t_0 è un punto di massimo [minimo] relativo proprio.

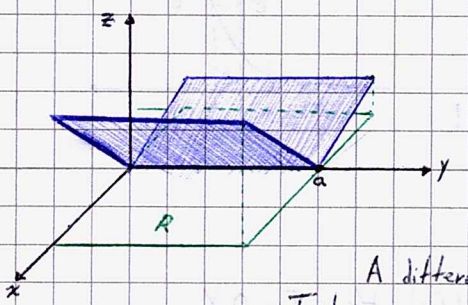
$$h''(t_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to t_0} \frac{h'(t)}{t - t_0}$$

Se questo limite è positivo, esiste un intorno di t_0 in cui il rapporto incrementale resta positivo; studiando il segno del rapporto si verifica che estremo relativo è.

La condizione è SUFFICIENTE, ma non necessaria: esistono funzioni, come $h(t) = t^4$, che hanno derivata seconda nulla nel punto di minimo (in questo caso $t = 0$ è anche minimo assoluto).
Si ottiene una condizione necessaria e sufficiente semplicemente includendo la possibilità che $h''(t_0) = 0$; nel viceversa non è necessario che il punto sia un estremo relativo proprio:

h derivabile in I, derivabile 2 volte in $t_0 \in I$, $h'(t_0) = 0$, $h''(t_0) \leq 0$ [≥ 0] $\Leftrightarrow$ t_0 è un massimo [minimo] relativo.

Per passare agevolmente alle funzioni scalari in 2 variabili, iniziamo con un esempio:



$$f(x,y) = |x| \quad , y \in [0, a] \; ; \; (x,y) \in R \text{ rettangolo chiuso}$$

La funzione è continua e definita nel compatto R; i punti di minimo sono tutti i punti $(0, y) : y \in [0, a]$, che non sono punti di minimo in senso stretto.

A differenza dell'Analisi I non è raro confrontarsi con punti di minimo relativo non propri!
Inoltre si ricorda che nella ricerca degli estremi relativi bisogna considerare non solo i punti interni, ma anche i punti di frontiera e di non derivabilità!

La definizione degli estremi relativi in $\mathbb{R}^n$ è ~~anagola~~analoga a quella in $\mathbb{R}$, ma in intorni in $\mathbb{R}^n$.

$x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice punto di minimo relativo per f in X se $\exists I_{x_0} : f(x_0) \leq f(x) \; \forall x \in I_{x_0} \cap X$ [massimo] [$\geq$]

Analoga è la definizione per gli estremi relativi in senso stretto:

$x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ punto di minimo relativo proprio per f in X se $\exists I_{x_0} : f(x_0) < f(x) \; \forall x \in I_{x_0} \cap (X - \{x_0\})$

Possiamo estendere il Teorema di Fermat: (condizione NECESSARIA perché x sia un estremo relativo)

Se $x_0 \in \mathring{X}$ è un punto di ~~minimo~~ estremo relativo per f e v è un versore e se f è derivabile in x_0 secondo la direzione di v, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0 \; ; \quad \text{in particolare, } \nabla f(x_0) = 0$$

Riccardo.polidoro.org

Dim

Se $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$ è un punto di minimo relativo, esiste $I_{\underline{x}_0} \subseteq X$: $f(\underline{x}_0) \leq f(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in I_{\underline{x}_0}$.

Poiché $\exists \delta > 0$ tale che $\underline{x}_0 + t\underline{v} \in I_{\underline{x}_0}$ $\forall t \in]-\delta, \delta[$ si ha che:

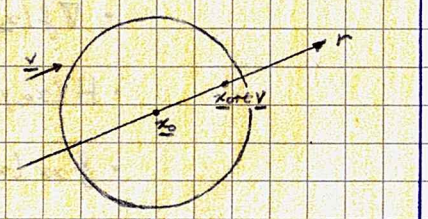
$$\frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} \begin{cases} \geq 0 & \forall t \in]0, \delta[\\ \leq 0 & \forall t \in]-\delta, 0[\end{cases}$$

Ne segue necessariamente per il teorema sulla permanenza del segno e il teorema del confronto (tesine in $\mathbb{R}$) che $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = 0$ □

Ricordiamo che:

$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$ (bilaterale)

$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| = |t|$



Dimostrazione più elegante: definendo $\varphi(t) = f(\underline{x}_0 + t\underline{v})$, la derivata direzionale è la derivata di φ in 0; applica poi il Teorema di Fermat a φ

La condizione necessaria ha un'utile applicazione pratica nell'esclusione dei punti che certamente NON possono essere estremi relativi: se un punto interno all'insieme di definizione della funzione ha almeno una derivata direzionale non nulla, certamente non è un estremo relativo. I punti rimanenti, aventi gradiente nullo, si dicono punti stazionari.

Definizione: $\underline{x}_0 \in X$ si dice punto stazionario per f se f è derivabile rispetto a tutte le variabili in $\underline{x}_0$ e $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$

Nella pratica ci interessano i punti stazionari interni, ottenuti studiando il sistema:

$$\begin{cases} f_{x_1}(\underline{x}) = 0 \\ f_{x_2}(\underline{x}) = 0 \\ \dots \\ f_{x_n}(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

Se sono punti interni, sono possibili candidati ad essere estremi relativi, ma non è detto che lo siano: la funzione $f(x,y) = x+y$; $(x,y) \in [0,1]^2$ è una funzione non negativa, nulla in 0 ma con derivate parziali sempre uguali a 1: il sistema a lato non ha soluzione, ma esiste il punto di minimo.

⚠ **La condizione di stazionarietà è NECESSARIA ma non sufficiente!**

Non ha senso parlare di monotonia in $\mathbb{R}^n$; sarà necessaria una condizione del II ordine.

Possibili candidati ulteriori sono i punti di frontiera e di non derivabilità.

Condizione SUFFICIENTE del secondo ordine (in $\mathbb{R}^2$) — È diversa tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$

Teorema: Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con X aperto; supponiamo che $f \in C^2(X)$

Allora, se $\underline{x}_0 \in X$ $(\equiv \mathring{X})$ tale che:

- $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$ stazionarietà
- $H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$
- $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ [< 0]

analogo per f_{yy}: sviluppando l'Hessiano si osserva che non possono annullarsi e sono concordi

[massimo]

Allora il punto (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo in senso stretto per la funzione f

Nella pratica la condizione si applica nei punti stazionari trovati con la condizione precedente; se $H(\underline{x}_0) > 0$ sono certamente estremi relativi!

Ricordiamo che

$$H(\underline{x}_0) = \begin{vmatrix} f_{x_1^2}(\underline{x}_0) & f_{x_1x_2}(\underline{x}_0) & \dots & f_{x_1x_n}(\underline{x}_0) \\ f_{x_2x_1}(\underline{x}_0) & f_{x_2^2}(\underline{x}_0) & \dots & f_{x_2x_n}(\underline{x}_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_nx_1}(\underline{x}_0) & f_{x_nx_2}(\underline{x}_0) & \dots & f_{x_n^2}(\underline{x}_0) \end{vmatrix}$$

Nelle ipotesi del Teorema di Schwartz, la matrice è SIMMETRICA.

riccardo.polidoro.org

Per valutare cosa accade più in generale aggiungiamo la condizione necessaria:

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $X \equiv \mathring{X}$ e supponiamo che $f \in C^2(X)$. Allora, se $(x_0, y_0) \in X$ è un punto di minimo relativo si ha necessariamente che:

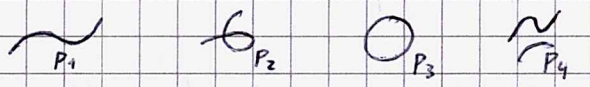
- $\nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$
- $H(x_0, y_0) \geq 0$
- $f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0$ — Analogo per il massimo

⚠ Si ottiene dunque che se $H(x_0, y_0) < 0$, il punto (x_0, y_0) NON È UN ESTREMO RELATIVO: a ogni intorno del punto appartengono punti in cui la funzione assume valore maggiore che in (x_0, y_0) e punti in cui assume valore minore. Tali punti stazionari si dicono **punti di sella** ($\underline{x_0} \in \mathring{X}$ stazionario, con $\nabla f(\underline{x_0}) = \underline{0}$ ma non è un estremo relativo)

Curve ①

<Ne alterniamo lo studio con quello delle funzioni.>

Premessa immaginativa: una curva nella nostra mente appare come un oggetto filiforme, che "non si spezza", possono intrecciarsi, possono essere chiuse.



NON È UNA CURVA (ne sono due!)

Una ~~fun~~ curva è facile da definire come una classe di funzioni il cui oggetto geometrico si dice **sostegno** della curva (in ottica fisica: una stessa curva è il luogo di infiniti moti possibili), ma non è così pratico...
Più pratica è la definizione analoga a quanto fatto per segmenti e rette, definite a partire da un parametro t come codominio di una funzione vettoriale continua in un intervallo; questa definizione però permette di costruire una curva che — come dimostrato da Peano — "riempie" il quadrato unitario, non sarebbe un oggetto filiforme! Occorre una condizione aggiuntiva.

Nel corso considereremo **curve semplici** (che non s'intrecciano):

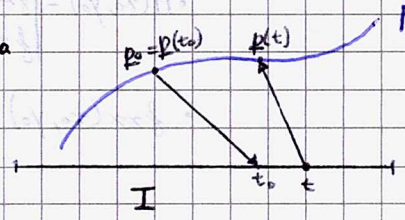
Una **curva semplice aperta** di $\mathbb{R}^2$ (o di $\mathbb{R}^3$) è un sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^2$ (o di $\mathbb{R}^3$) che è il codominio di una funzione vettoriale $\underline{f}$ definita in un intervallo I:

- continua in I
- biunivoca in I ($t' \neq t'' \Rightarrow \underline{f}(t') \neq \underline{f}(t'')$) ovvero NON SI INTRECCIA
- la sua funzione inversa $\underline{f}^{-1}$ è continua in Γ

] è un omeomorfismo

Le curve di $\mathbb{R}^2$ si dicono curve piane; quelle di $\mathbb{R}^3$ non contenibili interamente in un piano si dicono curve sghembe.

Una funzione continua, biunivoca e con inversa continua si dice **omeomorfismo di forma simile**, che deforma con continuità l'insieme di definizione, in maniera continua anche a ritroso.



Entrambi i viaggi sono fatti con continuità.

$\underline{f}$ si dice **rappresentazione parametrica** della curva Γ; poiché la funzione è vettoriale infatti il suo studio avviene tramite le sue componenti, ovvero le funzioni:

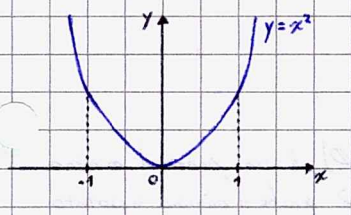
$\underline{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ curva sghemba ; $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$ curva piana

Si può anche considerare l'equazione vettoriale $\underline{r} = \underline{f}(t)$, $t \in I$ e le equazioni parametriche $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $t \in I$

L'intervallo I si dice **intervallo di base della rappresentazione parametrica** $\underline{f}$

Riccardo Polidoro

Esempio



Per verificare se è una curva aperta piana bisogna verificare se la funzione può assumere forma parametrica. In questo caso l'operazione è naturale:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad t \in [-1,1], \quad \underline{f}(t) = (t, t^2)$$

Si verifica facilmente che $\underline{f}(t)$ è un omeomorfismo, poiché è una funzione continua e biunivoca (essendo una funzione vettoriale ciò implica che a valori distinti del parametro la funzione assume valori sulla curva diversi; è sufficiente affinché una funzione vettoriale sia biunivoca che una delle funzioni componenti sia continua).

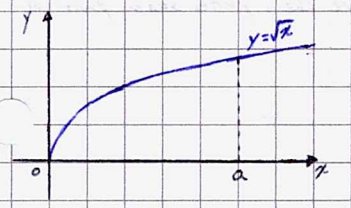
Ricordiamo che:

$\underline{f}: K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ biunivoca e continua su K compatto $\Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{f}^{-1}$ è continua e dunque $\underline{f}$ è un omeomorfismo

Questa non è però l'unica rappresentazione parametrica della curva:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = (-t)^2 = t^2 \end{cases} \qquad t \in [-1,1]$$

Si osserva dunque che il sostegno della curva è lo stesso; cambia però il modo di descriverla: nel primo esempio la curva era descritta nel verso delle t crescenti; in questo secondo esempio invece la descrizione avviene nel verso delle t decrescenti; logicamente vale per infiniti altri casi: nelle curve semplici **la rappresentazione parametrica NON È UNIVOCAMENTE DETERMINATA.**



In questo secondo esempio si può osservare in maniera molto più evidente quanto appena detto:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases} \qquad t \in [0, a]$$

è un omeomorfismo che rappresenta la curva; nella pratica però si preferisce adottare funzioni componenti che non provocano problemi;

Consideriamo dunque la rappresentazione parametrica $\begin{cases} y = t \\ x = t^2 \end{cases}$, $t \in [0, \sqrt{a}]$

Si osserva che oltre a variare la rappresentazione parametrica **cambia l'intervallo di base** della rappresentazione parametrica

Studio di Massimi e Minimi Relativi ②

Ricordando quanto ottenuto dalla condizione necessaria (in particolare che i punti stazionari hanno gradiente nullo) del I ordine e quelle necessaria e sufficiente del II ordine, ottenevamo delle importanti condizioni sull'Hessiano:

$H(x_0, y_0)$
- > 0: il punto è un estremo relativo proprio
- $= 0$: NON si può fare alcuna valutazione a priori, è un caso incerto/ambiguo; per comprendere la natura del punto occorre studiare la funzione in un suo intorno o fare altri ragionamenti.
- < 0: il punto è un punto di sella

Esempi

- $f(x,y) = x^2$ *supponiamo di non conoscere la natura della funzione*

① Insieme di definizione: $X = \mathbb{R}^2$

② La funzione è certamente derivabile in tutto l'insieme di definizione

③ Ricerchiamo i punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x = 0 \iff x = 0 \\ f_y(x,y) = 0 = 0 \ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{i punti stazionari sono tutti e soli i punti } (0,y) \ \forall y \in \mathbb{R}$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Il caso è incerto, ma sapendo che $f(0,y) = 0$ e che f è una funzione non negativa, $f(0,y) = 0 \leq f(x,y) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Ne segue che i punti stazionari trovati sono tutti punti di minimo assoluto per la f.

riccardo.polidoro.org

- $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \iff x = 0 \\ f_y = 4y = 0 \iff y = 0 \end{cases}$$ unico punto stazionario è $(0,0)$

$f_{xx} = 2$; $f_{yy} = 4$; $f_{xy} = 0 \Rightarrow H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$; $f_{xx} > 0 \Rightarrow (0,0)$ è un punto di minimo relativo proprio; è anche il minimo assoluto perché f è non negativa in tutto l'insieme di definizione $\Rightarrow f(x,y) \geq f(0,0)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Non essendovi altri punti stazionari, è certo che non ci siano altri estremi relativi.

- $f(x,y) = x^2y^2$

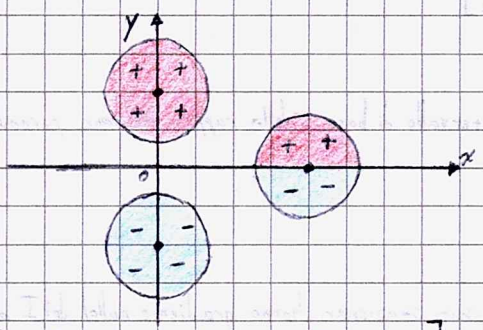
$$\begin{cases} f_x = 2xy^2 = 0 \iff x = 0 \vee y = 0 \\ f_y = 2x^2y = 0 \iff x = 0 \vee y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ i punti stazionari sono tutti e soli i punti appartenenti ai due assi coordinati $(x,0)\ \forall x \in \mathbb{R}$; $(0,y)\ \forall y \in \mathbb{R}$.

Si osserva facilmente che $H(x,0) = H(0,y) = 0$, ma è altrettanto semplice determinare che i punti sono punti di minimo assoluti: $f(x,0) = f(0,y) = 0 \leq x^2y^2\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $f(x,y) = x^2y^3$

$$\begin{cases} f_x = 2xy^3 \\ f_y = 3x^2y^2 \end{cases}$$ i punti stazionari sono $(x,0)\ \forall x \in \mathbb{R}$, $(0,y)\ \forall y \in \mathbb{R}$ e si osserva facilmente che $H(x,y) = 0$

Vediamo cosa accade negli intorni dei punti stazionari trovati:



[Si studia negli intorni se $f(x,y) \gtrless f(x_0,y_0)$]

Consideriamo un punto $(0,\bar{y})$: $\bar{y} > 0$

$f(0,\bar{y}) = 0$ $\forall \bar{y}$; ma $f(0,y) \geq 0\ \forall y > 0 \Rightarrow$ è un minimo relativo,

ovvero $\exists I_{(0,\bar{y})} : f(x,y) \geq f(0,\bar{y}) = 0\ \forall (x,y) \in I_{(x,y)}$

Ne segue che i punti del semiasse positivo delle y sono punti di minimo relativo; dualmente i punti del semiasse negativo delle y sono massimi relativi. Necessariamente, i punti dell'asse x, e in particolare l'origine, sono punti di sella.

Dimostriamo ora la condizione sufficiente del secondo ordine in $\mathbb{R}^2$ per determinare un estremo relativo.

$H(x_0,y_0) > 0$; $f_{xx}(x_0,y_0) = 0$; $\nabla f(x_0,y_0) = \underline{0} \Rightarrow (x_0,y_0)$ minimo relativo proprio, ovvero esiste un intorno del punto in cui i valori assunti dalla funzione sono strettamente maggiori del valore assunto dalla funzione in quel punto.

Poiché $f \in C^2(X)$ con X aperto, l'Hessiano è certamente una funzione continua. Per il teorema sulla permanenza del segno sappiamo che una funzione continua con un determinato segno in un punto, ~~si mantiene~~ essendo tale valore pari al limite della funzione in quel punto esiste certamente un intorno del punto in cui la funzione assume lo stesso segno; ne segue che esiste $I_{(x_0,y_0)} \subseteq X$ (aperto) tale che $H(x,y) > 0$ e $f_{xx}(x,y) > 0\ \forall (x,y) \in I_{(x_0,y_0)}$.
Definito l'intorno, resta da dimostrare che i punti che vi cadono, diversi da (x_0,y_0), determinino valori maggiori di $f(x_0,y_0)$.
Per procedere si struttura la Formula di Taylor con resto di Lagrange del II ordine e di punto iniziale (x_0,y_0).

Considerando un punto $(x,y) \in I_{(x_0,y_0)}$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$; per la Formula... sappiamo che:

$\exists\, \underline{c} = (c_1,c_2)$ interno al segmento $\overline{(x,y)\,(x_0,y_0)}$ (dunque diverso dagli estremi) certamente contenuto in I tale che:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(c_1,c_2)(x-x_0)^2 + 2\overbrace{f_{xy}}^{(c_1,c_2)}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(c_1,c_2)\cdot(y-y_0)^2\right]$$

(x_0,y_0) è un punto stazionario con derivate parziali nulle $\Rightarrow$ il termine del I ordine non c'è.

appunti.riccardo.polidoro.org

Se vogliamo dimostrare che il quadrato simbolico $[\cdot]$ è strettamente positivo, si è dimostrato che $f(x,y)$ è necessariamente strettamente maggiore di $f(x_0,y_0)$, poiché si ottiene sommando al valore assunto dalla funzione in (x_0,y_0) il quadrato simbolico.

Se consideriamo un punto $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ appartenente all'interno e tale che $y=y_0$, il quadrato simbolico può riscriversi nella forma:

- (x,y_0), $[\cdot] = \underbrace{f_{xx}(c_1,c_2)}_{>0 \text{ perché } x \neq x_0}(x-x_0)^2$; per il teorema sulla permanenza del segno siamo certi che $f_{xx}(c_1,c_2)>0$ perché interno al segmento nell'interno da cui siamo partiti

$f_{xx}(c_1,c_2)>0$ per Hp.

Consideriamo ora il caso in cui $(x,y) \neq (x,y_0) \Rightarrow y \neq y_0$:

$$[\cdot] = \underbrace{(y-y_0)^2}_{>0 \text{ poiché } y \neq y_0} \left(f_{xx}(c_1,c_2)\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)^2 + 2f_{xy}(c_1,c_2)\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right) + f_{yy}(c_1,c_2) \right)$$

La dimostrazione del teorema discende dal provare che $f_{xx}(c_1,c_2)\lambda^2 + 2f_{xy}(c_1,c_2)\lambda + f_{yy}(c_1,c_2) > 0$

Si osserva facilmente che il trinomio ha discriminante negativo e che dunque assume sempre lo stesso segno del termine quadratico, che è in questo caso positivo $\Rightarrow$ il quadrato simbolico è certamente positivo.

Infatti, $\frac{\Delta}{4} = \left(f_{xy}(c_1,c_2)\right)^2 - f_{yy}(c_1,c_2)\cdot f_{xx}(c_1,c_2) = \underbrace{-H(c_1,c_2)}_{>0 \text{ per il Teorema di permanenza del segno}} < 0$ □

In $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ si può dare una condizione che non riguarda il segno dell'Hessiana, si possono infatti studiare alcuni minori particolari del secondo ordine o il segno degli autovalori della matrice Hessiana: è facile verificare ad esempio per $n=2$ che la condizione sufficiente perché un punto sia di massimo relativo è che gli autovaleri della matrice hessiana siano entrambi negativi (min $\Rightarrow$ entrambi pos; +/- sella; se c'è almeno un autovalore nullo è un caso incerto).

Esercizi

- $f(x,y) = x^2 - y^4$

$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \iff x=0 \\ f_y = -4y^3 = 0 \iff y=0 \end{cases}$ $\Rightarrow (0,0)$ è l'unico punto stazionario

Calcoliamo le derivate seconde: $f_{xx}=2$; $f_{xy}=f_{yx}=0$; $f_{yy}=-12y^2$

Ne segue che $H(0,0)=0$ $\Rightarrow$ CASO INCERTO

Restringiamo la funzione lungo gli assi:

$f(x,0) \Rightarrow x^2$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ è un punto di minimo per la restrizione considerata

$f(0,y) = -y^4$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ è un punto di massimo per $-y^4$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di sella.

Consiglio: Calcola l'Hessiano solo nei punti stazionari, computando le derivate seconde nei punti ed evitando di saturare la matrice con lunghe espressioni!

L'utilizzo delle restrizioni nell'analisi degli estremi relativi è particolarmente utile nell'individuare punti di sella: se la restrizione della funzione ad una retta passante per il punto stazionario è strettamente crescente, essa non ammette minimo né massimo; ne segue che la funzione globalmente non ammette minimo né massimo in quel punto.

riccardo.polidoro.org

- $f(x,y) = y(y-x^2) = y^2 - x^2y$

$$\begin{cases} f_x \\ f_y \end{cases} \begin{cases} -2xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ è l'unico punto stazionario}$$

$f_{xx} = -2y$; $f_{xy} = f_{yx} = -2x$; $f_{yy} = 2$ $\Rightarrow$ $H(0,0) = 0$

Consideriamo le restrizioni:

$f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(0,y) = y^2 \Rightarrow 0$ è un punto di minimo per la restrizione

Lungo una qualsiasi retta: $f(x,kx) = k^2x^2 - kx^3 = h(x)$

La restrizione è una funzione $h(x)$ in una sola variabile, la studiamo

$h'(x) = 2k^2x - 3kx^2$; $h'(0) = 0$

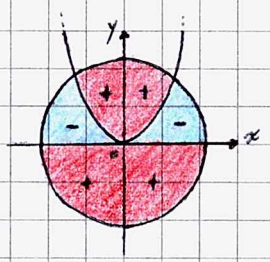
Si osserva inoltre che $h''(0) = 2k^2 \Rightarrow 0$ è punto di minimo per ogni restrizione lungo rette passanti per l'origine

Essendo la funzione differenziabile, si ha che $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,0) = 0 \quad \forall \underline{v}$; è dunque rispettata la condizione necessaria.

Il punto però non è un minimo relativo malgrado le osservazioni sulle restrizioni (le quali hanno permesso di escludere che si tratti di un massimo relativo). Per dimostrarlo occorre necessariamente applicare la definizione:

$\exists I_{(0,0)} : f(0,0) = 0 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in I_{(0,0)}$?

$$f(x,y) = y^2 - x^2y \geq 0 \iff \begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} y \leq 0 \\ y \leq x^2 \end{cases}$$



Ne segue che l'origine è punto di sella; in assenza di altri metodi è evidentemente necessario applicare la definizione di estremo relativo.

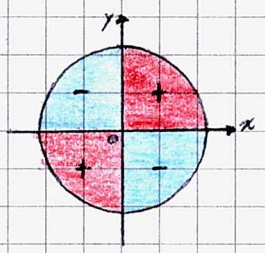
- $f(x,y) = e^{xy}$

$$\begin{cases} f_x \\ f_y \end{cases} \begin{cases} y e^{xy} = 0 \iff y = 0 \\ x e^{xy} = 0 \iff x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ è l'unico punto stazionario}$$

$f_{xx} = y^2 e^{xy}$; $f_{yy} = x^2 e^{xy}$; $f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} + yx e^{xy}$; $H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di sella.
Allo stesso risultato si poteva pervenire più rapidamente applicando la definizione:

$$f(x,y) \geq f(0,0) = 1 \iff e^{xy} \geq 1 \iff xy \geq 0$$



riccardo.polidoro.org

• $f(x,y) = xy^2 - x^3 + y^2$

$$\begin{cases} f_x \\ f_y \end{cases} \begin{cases} y^2 - 3x^2 = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{se } y=0 \Rightarrow x=0 \\ \text{se } x=-1 \Rightarrow y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3} \end{array}$$

$2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0 \iff y = 0 \vee x = -1$

I punti stazionari sono $(0,0)$, $(-1,\sqrt{3})$, $(-1,-\sqrt{3})$

$f_{xx} = -6x$; $f_{xy} = f_{yx} = 2y$; $f_{yy} = 2x+2$ $\Rightarrow$ $H(x,y) = \begin{vmatrix} -6x & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{vmatrix}$

$H(-1,\sqrt{3}) = \begin{vmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -12 = H(-1,-\sqrt{3})$ $\Rightarrow$ $(1,\pm\sqrt{3})$ sono punti di sella.

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ Caso INCERTO

Ragionare sulla definizione sarebbe molto complicato, ma si nota che è possibile effettuare un'analisi efficace restringendo la funzione all'asse x:

$f(x,0) = -x^3$ funzione strettamente decrescente, non ammette estremi relativi.

Ne segue che anche $(0,0)$ è un punto di sella.

• $f(x,y) = \cos x - \operatorname{sen} y$

$$\begin{cases} f_x \\ f_y \end{cases} \begin{cases} -\operatorname{sen} x = 0 \iff x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ -\cos y = 0 \iff y = \frac{\pi}{2} + h\pi, \ h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + h\pi\right)_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ h\in\mathbb{Z}}}$$ sono punti stazionari.

⚠ Non è detto che i coefficienti siano gli stessi !!

$f_{xx} = -\cos x$; $f_{xy} = f_{yx} = 0$; $f_{yy} = \operatorname{sen} y$

$H(x,y) = -\cos x \operatorname{sen} y$; $H\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + h\pi\right) = \begin{vmatrix} -\cos k\pi & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + h\pi\right) \end{vmatrix} = -\cos(h\pi)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + h\pi\right)$

Ponendo $(x_0, y_0) = \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + h\pi\right)$ abbiamo che:

- Se $k \in \mathbb{N}_p$, $h \in \mathbb{N}_p$ $\Rightarrow$ $H(x_0,y_0) = -1$ il punto è un punto di sella
- Se $k \in \mathbb{N}_p$, $h \in \mathbb{N}_d$ $\Rightarrow$ $H(x_0,y_0) = 1$ e $f_{xx}(x_0,y_0) = -1$ punto di massimo relativo proprio
- Se $k \in \mathbb{N}_d$, $h \in \mathbb{N}_p$ $\Rightarrow$ $H(x_0,y_0) = 1$ e $f_{xx}(x_0,y_0) = 1$ punto di minimo relativo proprio
- Se $k \in \mathbb{N}_d$, $h \in \mathbb{N}_d$ $\Rightarrow$ $H(x_0,y_0) = -1$ il punto è un punto di sella

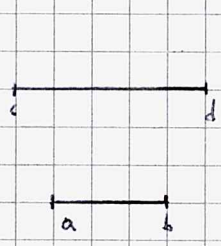
Dunque, se h e k sono entrambi pari [dispari] si hanno punti di sella; altrimenti si hanno estremi relativi propri.

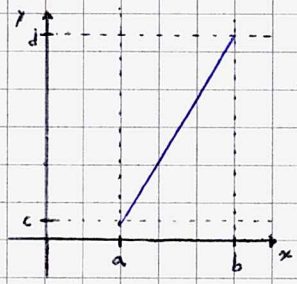
Sapendo che la f è limitata, si osserva che gli estremi relativi sono anche estremi assoluti.

riccardo.polidoro.org

Curve ②

Ricordando la definizione di curva semplice aperta come codominio di un omeomorfismo, osserviamo che se si hanno due intervalli I e J di $\mathbb{R}$ compatti, è sempre possibile costruire una funzione biunivoca e continua tra i due intervalli; per conseguenze del teorema di Bolzano inoltre sappiamo che se uno degli intervalli è il codominio dell'altro attraverso la funzione, essa sarà necessariamente strettamente monotona.

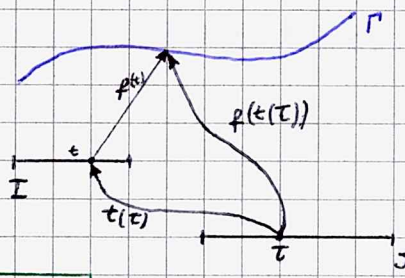




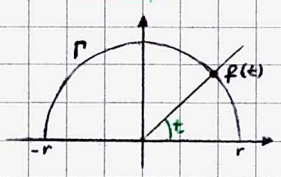
esempio di funzione invertibile (in questo caso strettamente crescente).

Ne segue che due intervalli compatti sono sempre omeomorfi tra loro; si dimostra che questo omeomorfismo è necessariamente una funzione strettamente monotona.

Questa osservazione vale anche tra due intervalli aperti, semiaperti... anche tra un ~~compatto~~ intervallo limitato ed un ~~intero~~ intervallo non limitato come nel caso della funzione $tg x$ in un periodo.
Tra due intervalli della stessa natura topologica (chiuso, aperto, semiaperto...) si instaura sempre un omeomorfismi. Essendo omeomorfi, se consideriamo una curva Γ e una sua rappresentazione parametrica di base l'intervallo I e consideriamo un intervallo J della stessa natura di I sul quale fissiamo un parametro τ, sappiamo che è possibile costruire una funzione $t(\tau): J \to I$ biunivoca, continua e con inversa $\tau(t)$ continua, strettamente monotona per quanto detto in precedenza.
È dunque possibile considerare la funzione composta $(\varphi \circ t)(\tau) \in \Gamma$, che è anch'essa un omeomorfismo poiché composte di funzioni continue sono continue, composte di funzioni invertibili sono invertibili, l'inversa della funzione composta sarà composta di funzioni continue. La funzione così ottenuta è dunque anch'essa una rappresentazione parametrica della curva Γ di base l'intervallo J; poiché gli intervalli della stessa natura topologica sono tra loro omeomorfi siamo certi che esistono infinite rappresentazioni parametriche di una curva Γ aperta, che differiscono tra ~~loro~~ loro per l'intervallo di base e che si possono ottenere l'una dall'altra ~~con~~ attraverso la composizione mediante funzioni strettamente monotone.



Esempi



Ha diverse rappresentazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad , t \in [0, \pi]$$

È certamente una rappresentazione parametrica di Γ; le componenti prese singolarmente non sono biunivoche ma la funzione φ lo è, poiché considerando $t' \neq t'' \Rightarrow \varphi(t') \neq \varphi(t'')\ \forall t', t''$.

$$\begin{cases} x(t) = r\cos 2t \\ y(t) = r\,\mathrm{sen}\, 2t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$

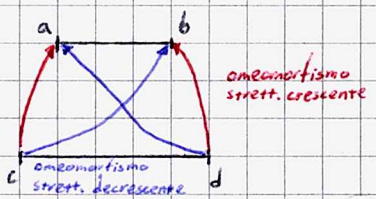
Analogo: la funzione strettamente monotona $2t$ trasforma l'intervallo di base precedente in un suo omeomorfo, ma descrive la stessa curva.

$$\begin{cases} x(t) = r\cos(-2t) \\ y(t) = r\,\mathrm{sen}(-2t) \end{cases} \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Essendo strettamente decrescente, la funzione $-2t$ descrive la curva nel verso di percorrenza opposto.

Dunque, se $I = [a, b]$: $\quad [I =]a, b[\,]$

- Γ è un compatto (Teorema di Weierstrass) [aperto]
- $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$, detti estremi della curva Γ, sono sempre le immagini degli estremi dell'intervallo di base
- Γ si dice dotata di estremi [priva di estremi] (se I è semiaperto Γ si dice dotata di 1 estremo)

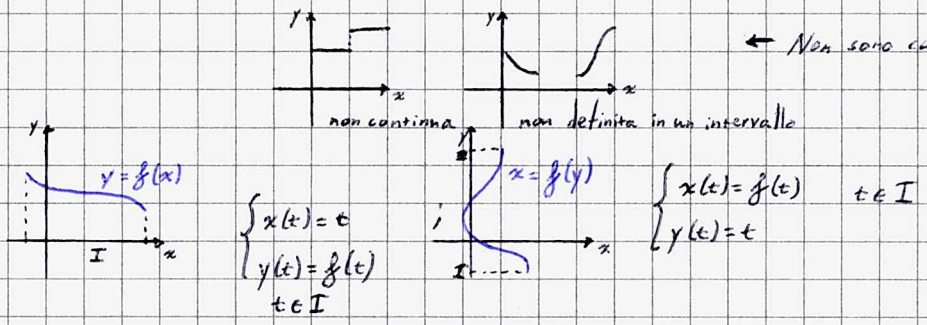


Per il Teorema di Bolzano, una curva semplice aperta è sempre un connesso; si dimostra inoltre che è priva di punti interni, in accordo con la sua definizione come oggetto filiforme: $\mathring{\Gamma} = \emptyset$

riccardo.polidoro.org

Esempi di curve semplici aperte:

Ricordiamo che G_f è una curva semplice aperta piana se $f: I \to \mathbb{R}$ è continua nell'intervallo I.



Si ha una curva semplice aperta piana se è possibile assumere una variabile cartesiana come parametro: si ha una funzione invertibile e continua, con inversa certamente continua (andrebbe però formalizzato in un insieme non compatto).

G_f: e^x (non ha estremi); $\sqrt{x}$ (ha un estremo); $\arcsen x$ (ha 2 estremi)

- La parabola è una curva piana semplice aperta.
- Rette, semirette e segmenti di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ sono curve semplici aperte: basta ricordare la funzione vettoriale usata per definire la retta di direzione $\underline{v}$ passante per un punto P_0 in $\mathbb{R}^n$, in cui $x_i(t) = x_{i0} + t v_i$, $t \in \mathbb{R}$, o le relazioni $x_i(t) = x_{i1} + t(x_{i2} - x_{i1})$ per descrivere la retta passante per due punti P_1 e P_2 ($t \in \mathbb{R}$); con ~~$i \in \{1, 2, [3]\}$~~. $i \in \{1, 2, [3]\}$.
- Un'iperbole equilatera con equazione canonica $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ non è una curva semplice aperta, ma un solo ramo lo è!

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 + a^2 \quad \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2} \\ x \leq 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2} \end{cases}$$

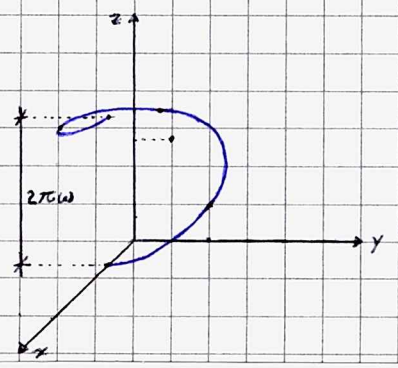
- La curva tridimensionale con la rappresentazione parametrica di seguito è una curva semplice aperta. Si osservi che la sua descrizione avviene attraverso uno studio delle componenti e la loro evoluzione in determinati intervalli.

$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sen t \\ z(t) = \omega t \end{cases} \qquad \begin{matrix} r > 0 \\ \omega > 0 \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

È una curva semplice aperta e priva di estremi, con funzioni componenti tutte continue e $z(t)$ biunivoca $\Rightarrow$ $f(t)$ è certamente un omeomorfismo. ($f: t \in \mathbb{R} \to (r\cos t, r\sen t, \omega t) \in \mathbb{R}^3$).
La continuità dell'inverso si "dimostra" verificando l'evoluzione della curva negli intervalli.

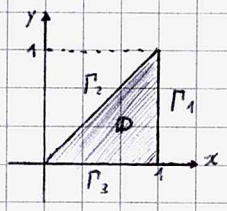
Osserviamo che $(x(t))^2 + (y(t))^2 = r^2$ che, per $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, rappresenta l'equazione della superficie cilindrica ~~circolare~~ circolare $x^2 + y^2 = r^2$, con generatrici parallele all'asse z.
Per la costruzione si analizza l'evoluzione delle componenti in intervalli particolari: ad esempio, sappiamo che da 0 a $\pi/2$ le ascisse decrescono da 0 a 1, mentre avviene l'inverso per le ordinate; le quote crescono costantemente.

Attraverso simili considerazioni si ottengono gli altri tratti di curva; si osserva inoltre che la curva in $[0, 2\pi]$ si ripete iterativamente $\Rightarrow$ la curva è una curva semplice aperta, detta elica cilindrica di passo ω.



riccardo.polidoro.org

Lo studio delle curve ha degli interessanti punti di contatto con lo studio di massimi e minimi:



$f(x,y) = xy$ volendo cercare i massimi e i minimi assoluti della f nel dominio:

① Si cercano punti stazionari interni al dominio, possibili minimi/massimi:

$$\begin{cases} f_x \\ f_y \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ unico p.to stazionario MA NON È INTERNO}$$

Non ci sono punti di massimo/minimo relativo interni, in cui la funzione dovrebbe avere $\nabla = 0$.

② Poiché vale il Teorema di Weierstrass, sappiamo che la funzione ha certamente punti di minimo/massimo $\Rightarrow$ essi appartengono certamente a ∂D, che può essere letto come la composizione di 3 curve semplici aperte:

$$\Gamma_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} t \in [0,1] \quad ; \quad \Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} t \in [0,1] \quad ; \quad \Gamma_3: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} t \in [0,1]$$

Restringiamo f sulle Γ_i:

- $f_{\Gamma_1}(x,y) = f(1,t) = g_1(t) = t$ strettamente crescente in $[0,1] \Rightarrow$ $t = 0$ è il minimo, $t = 1$ è il massimo

  Ne segue che $(1,0)$ è potenzialmente un minimo, $(1,1)$ un potenziale massimo

- $f_{\Gamma_2}(x,y) = f(t,t) = g_2(t) = t^2$ in $[0,1]$ è strettamente crescente $\Rightarrow$ $(1,1)$ è un potenziale massimo, $(0,0)$ è un potenziale minimo

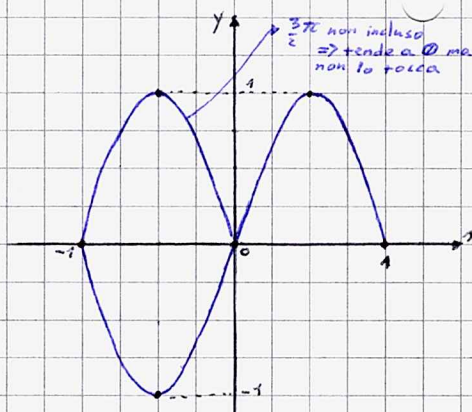
- $f_{\Gamma_3}(x,y) = f(t,0) = g_3(t) = 0$ costante $\Rightarrow$ tutti i punti sono potenziali minimi/massimi

$(1,1)$ è certamente l'UNICO punto di massimo; $\max_{[0,1]} f = 1 = f(1,1)$

Confrontando i valori tra $(t,0)$ e $(1,0)$ si osserva che i punti $(t,0)$ sono di minimo e $\min_{[0,1]} f = 0$.

⚠ La continuità della funzione inversa è una condizione importante!

Consideriamo ad esempio la funzione $\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$, $t \in [0, 3/2\,\pi[$



Si osserva che la curva non è una curva semplice poiché si perde la continuità della funzione inversa: la funzione inversa è continua se avvicinandosi a un punto della curva – che proviene da un unico parametro – l'inversa si avvicinerà dai punti vicini della curva a parametri vicini nell'intervallo; si osserva che nell'intorno dell'origine cadono punti vicini relativi al parametro $\pi/2$, ma l'origine è anche di accumulazione per il tratto di curva dovuto a parametri vicini a $3/2\,\pi \Rightarrow \varphi^{-1}$ non è continua nell'origine, anche se φ è continua e biunivoca.

Due curve Γ_1 e Γ_2 si dicono consecutive – premesso che siano semplici aperte – se hanno come unico punto in comune un estremo di entrambe le curve.
L'unione di due curve consecutive può dare problemi, come l'esempio precedente – leggibile come l'unione di una curva semplice aperta per $t \in [0, \pi]$ ed una con $t \in [\pi, 3/2\,\pi[$.
Se Γ_1 e Γ_2 sono consecutive e dotate di estremi, allora $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è una curva semplice dotata di estremi.

Se Γ è una curva semplice aperta, la curva semplice aperta dotata di estremi $\Gamma' \subseteq \Gamma$ si dice un arco di Γ.

riccardo.polidoro.org

Curve semplici Chiuse

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2 \ (\circ \ \mathbb{R}^3)$ si dice una curva semplice chiusa se è il codominio di una funzione $f:[a,b] \to \Gamma$ tale che:

- f è continua — è una curva
- $f(a) = f(b)$ — è chiusa
- f è biunivoca in $[a,b[$ (analogo per $]a,b]$) — è semplice

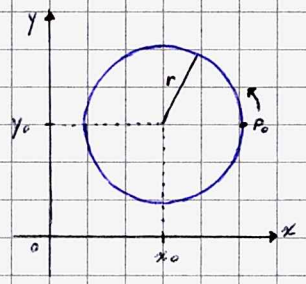
⚠ Come intuibile dall'esempio precedente, f^{-1} non può essere continua nel punto in cui la curva si chiude (ci si avvicinerebbe da parametri vicini a valori diversi).

Il punto $f(a) = f(b)$ si dice *punto di chiusura* [partenza].

Una funzione di questo tipo si dice *rappresentazione parametrica* di Γ di base $[a,b]$; ovviamente ne esistono infinite.

Come per le curve semplici aperte, una curva semplice chiusa è un insieme connesso (T. di Bolzano) e compatto (T. di Weierstrass); sono inoltre insiemi misurabili secondo Peano-Jordan, con misura nulla.

Esempi

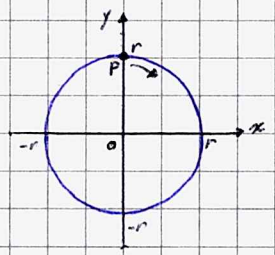


$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

eq. parametriche: $\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

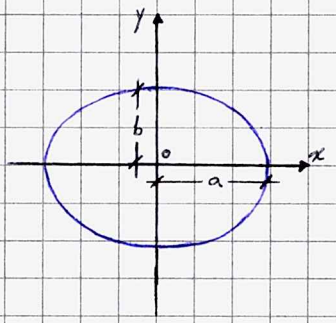
Sono funzioni continue che assumono lo stesso valore negli estremi dell'intervallo; in questa rappresentazione parametrica il punto di chiusura è $P \equiv (x_0+r, y_0)$

Per altre valutazioni consideriamo una circonferenza con centro nell'origine:



$\begin{cases} x = r\sin t \\ y = r\cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

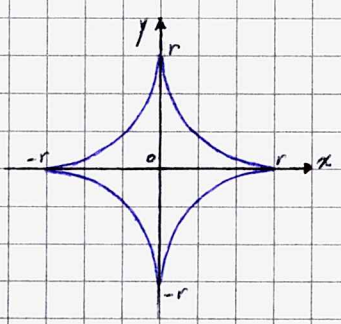
Cambia il punto di chiusura $P \equiv (0,r)$ e il verso di percorrenza.



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, supponiamo $a > b$

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

Elevando al quadrato le due equazioni e sommandole si ottiene l'equazione cartesiana dell'ellisse $\Rightarrow$ i punti di questo tipo appartengono all'ellisse; per il viceversa la dimostrazione è più complessa, poiché t non coincide con l'anomalia del punto.



ASTEROIDE

$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

f è continua, assume lo stesso valore negli estremi; nell'elevazione al cubo non cambiano informazioni sulla biunivocità $\Rightarrow$ il sistema è una rappresentazione parametrica di una curva semplice chiusa. Derivando le due equazioni parametriche si osserva che i 4 punti cuspidali provengono da punti in cui entrambe le derivate sono nulle.

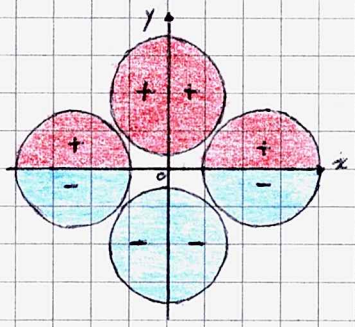
$\begin{cases} x'(t) = -3r\cos^2 t \sin t \\ y'(t) = 3r\sin^2 t \cos t \end{cases}$

riccardo.poliboro.org

- $f(x,y) = e^{x^2y^3}$ $\quad X \equiv \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f_x \\ f_y \end{cases} \begin{cases} 2xy^3 e^{x^2y^3} = 0 \iff x=0 \vee y=0 \\ 3x^2y^2 e^{x^2y^3} = 0 \iff x=0 \vee y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,0);(0,y) \text{ sono punti stazionari } \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Non conviene calcolare l'Hessiano, che risulterebbe nullo. Sappiamo però che $f(x,0) = f(0,y) = 1$; è possibile applicare la definizione di estremo relativo:

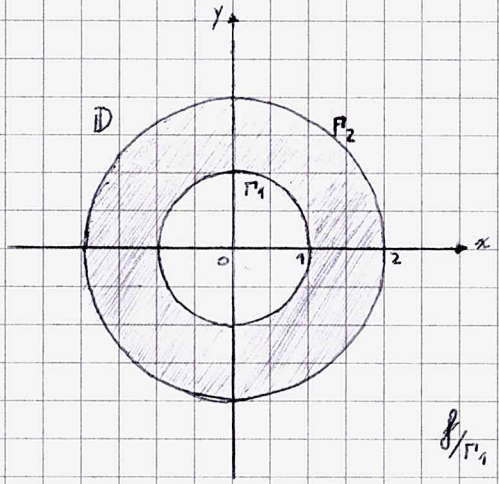


$e^{x^2y^3} \geq 1 \iff x^2y^3 \geq 0$; il segno dipende solo da y.

I punti $(x,0)$ sono di sella (incluso l'origine!)

I punti $(0,y)$ escluso l'origine sono → minimi relativi per $y>0$
→ massimi relativi per $y<0$

- $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ calcoliamo minimo e massimo assoluto nella corona circolare delimitata dalle circonferenze di raggio 1 e 2.



L'argomento è strettamente positivo $\Rightarrow$ f è derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$. Essendo la funzione radice strettamente crescente, la determinazione di minimi e massimi è particolarmente semplice:

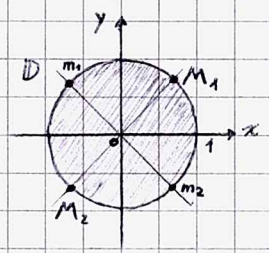
$$f_x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad ; \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

L'unico punto stazionario è $(0,0) \notin D$; non esistono dunque punti stazionari interni all'insieme; valutiamo ciò che accade nei punti di frontiera.

$f_{/\Gamma_1}(x,y) = \sqrt{2}$ costante ; $f_{/\Gamma_2}(x,y) = \sqrt{5}$ costante

Essendo la radice una funzione strettamente crescente, e poiché nel dominio non cadono punti in cui la derivata si annulla, minimo e massimo sono identificati.
Se non si intuisce la natura della funzione radice, si può parametrizzare: $\begin{cases} f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \sqrt{1+\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} \\ f(2\cos t, 2\operatorname{sen} t) = \sqrt{1+4\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t} \end{cases}$

- $f(x,y) = \oint xy$ ricerchiamo minimo e massimo assoluto nel cerchio di raggio unitario.



Si osserva che $(0,0)$ è l'unico punto stazionario interno all'insieme; poiché cerchiamo massimi / minimi assoluti non è rilevante determinare la sua natura.

Ci restringiamo alla frontiera, studiando la funzione:

$g(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \operatorname{sen} t \cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$

$g'(t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 0 \iff \operatorname{sen}^2 t = 1/2 \Rightarrow \operatorname{sen} t = \pm\sqrt{2}/2 \Rightarrow t = \pm\frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi \vee \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi$

Bisogna studiare i punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$; $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$; $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e per $t=0 \Rightarrow (1,0)$ ⚠

$f(0,0) = f(1,0) = 0$

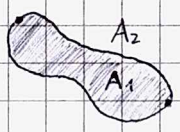
$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$ massimi assoluti ; $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$ minimi assoluti

Nel calcolo di estremi assoluti si deve solo CONFRONTARE i valori assunti dalla f nei punti critici

riccardo.polidoro.org

Sulle curve chiuse si ottengono due importanti risultati:

- Γ è una curva semplice chiusa $\Leftrightarrow$ è l'unione di due curve semplici aperte con gli estremi in comune e nessun altro punto in comune (intuitivo, ma con una dimostrazione analitica lunga!)
- <u>Teorema di Jordan</u>: Se Γ è una curva semplice chiusa piana, allora $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ è l'unione di due aperti connessi disgiunti — privi di punti in comune — uno limitato e l'altro non limitato e che hanno entrambi frontiera uguale a Γ



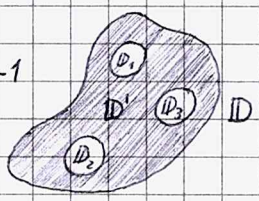
⚠ Le ipotesi sulla curva sono fondamentali!

I punti di A_1 si dicono interni a Γ, poiché la curva è la frontiera dell'insieme limitato; analogamente i punti di A_2 si dicono esterni.

$\partial A_2 = \partial A_1 = \Gamma$ Si individua una classe di insiemi importanti nella definizione dei campi vettoriali: $A_1 \cup \Gamma$ è un dominio limitato e compatto, internamente connesso e dunque connesso. Un dominio avente per frontiera una curva chiusa si dice **dominio di Jordan.**

Si definisce dominio di Jordan a unico contorno un dominio la cui frontiera è una curva semplice chiusa (ad esempio gli insiemi normali in $\mathbb{R}^2$, i cerchi e i settori circolari), esistono però altri domini compatti e connessi — come la corona circolare — con buone proprietà: in generale, definiamo un dominio di Jordan a più contorni come un dominio la cui frontiera è l'unione di n curve semplici chiuse disgiunte, ovvero:

$$\mathbb{D}' = \mathbb{D} - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathring{\mathbb{D}}_i \qquad \text{con } \mathbb{D}_i \text{ domini di Jordan contenuti in } \mathbb{D}, \text{ con } i = 1, \dots, n-1$$

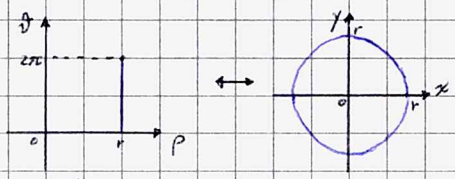


$$\partial\mathbb{D} = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{n-1}$$

Γ contorno esterno

A prescindere dal numero di contorni, le proprietà topologiche di questi domini non cambiano, sono insiemi importanti nella definizione dei campi vettoriali.

<u>Curve semplici esprimibili attraverso coordinate polari</u>



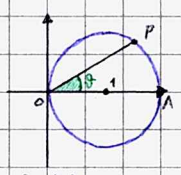
$\rho(\vartheta) = r$

$\vartheta \in [0, 2\pi]$

$\begin{cases} x = \rho(\vartheta)\cos\vartheta \\ y = \rho(\vartheta)\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}$

$\vartheta \in [0, 2\pi]$

l'immagine è sempre data dalla rappresentazione parametrica, che può essere espressa tramite le coordinate polari.



$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = \text{sen}\,t \end{cases}$

$t \in [0, 2\pi]$

Posso però mantenere il polo nell'origine, fissare un punto P sulla circonferenza e considerare la sua anomalia rispetto ad O: il raggio vettore OP varia in funzione dell'anomalia. Essendo il triangolo $O\hat{P}A$ rettangolo in P, si ha che:

$$\rho(\vartheta) = 2r\cos\vartheta \qquad \vartheta \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

La medesima circonferenza può dunque provenire da un'equazione polare, in cui si assegna la variazione del raggio vettore in funzione dell'anomalia del punto, con polo nell'origine. Una possibile rappresentazione parametrica è data da:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = 2\cos\vartheta\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = 2\cos\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}, \quad \vartheta \in \left[-\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Nota: se ϑ coincide con l'anomalia, è possibile parametrizzare la curva rispetto a ϑ più che rispetto a t

Per esercizio, si consiglia di cercare la rappresentazione parametrica in coordinate polari della circonferenza di centro il punto $(0, 1)$ e raggio 1

riccardo.polidoro.org

Se ~~ρ~~ $\rho : \vartheta \in I \to \rho(\vartheta) \in [0, +\infty[$ – certamente positiva perché ρ è un segmento – è continua in I (non si spezza) e se $\rho(\vartheta) \neq \rho(\vartheta + 2k\pi)$ ovvero la curva è semplice, $k \in \mathbb{Z}$, allora:

- Le equazioni $\begin{cases} x = \rho(\vartheta)\cos\vartheta \\ y = \rho(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$ con $\vartheta \in I$ sono le equazioni parametriche di una curva semplice aperta piana Γ.

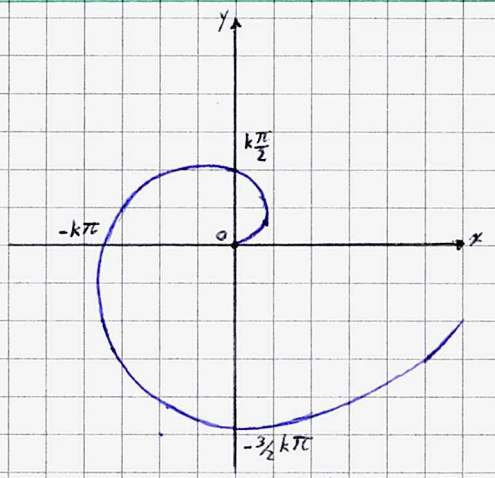
- $\rho = \rho(\vartheta)$ si dice equazione polare della curva Γ.

Se $\rho : \vartheta \in [\alpha, \alpha + 2\pi] \to \rho(\vartheta) \in [0, +\infty[$ è continua e $\rho(\alpha) = \rho(\alpha + 2\pi)$ avremo che $\rho = \rho(\vartheta)$ è l'equazione polare di una curva semplice chiusa del piano.

Esempi

- $\rho = k\vartheta$ consideriamo $k > 0$ per fissare le idee.

  Nel piano ρ, ϑ è una retta per l'origine, nel piano x, y osserviamo che essendo ρ definito positivo, si ha necessariamente che $\vartheta \in [0, +\infty[$; la funzione è continua e si osserva facilmente che $\rho(\vartheta) \neq \rho(\vartheta + 2n\pi) = k\vartheta + k2n\pi$; siamo sicuri che $\rho = \rho(\vartheta)$ è l'equazione polare di una curva semplice aperta con un estremo (poiché $\rho(0) = 0$).
  Il raggio vettore cresce linearmente.



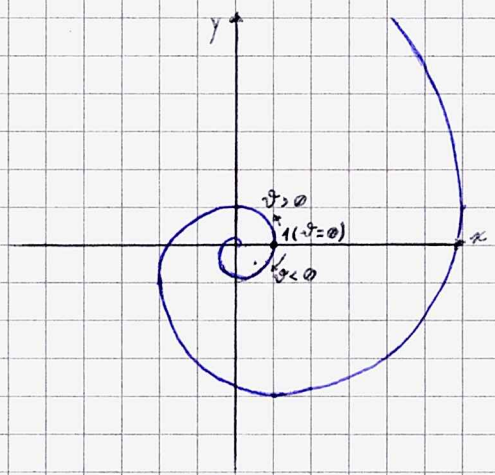
Spirale di Archimede

- $\rho(\vartheta) = e^{a\vartheta}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ consideriamo $a > 0$ per fissare le idee; ~~nel grafico consideriamo anche gli $a < 0$~~

Si osserva che la crescita del raggio vettore è esponenziale: a seconda del segno di ϑ infatti esso cresce/decresce rapidamente.

$$\begin{cases} x(\vartheta) = e^{a\vartheta}\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = e^{a\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in \mathbb{R}$$

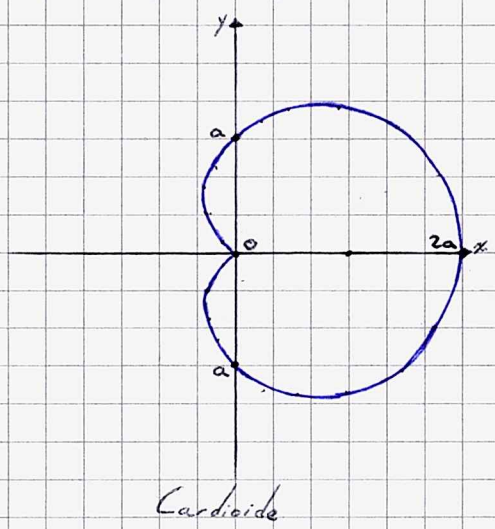
Non raggiunge mai l'origine; non è dotata di estremi, è una curva semplice aperta.



Spirale logaritmica

- $\rho(\vartheta) = a(1 + \cos\vartheta)$ consideriamo $a \geq 0$ per fissare le idee
  $\vartheta \in [0, 2\pi]$
  $\rho(0) = \rho(2\pi) = 2a \Rightarrow$ è una curva chiusa.

$$\begin{cases} x(\vartheta) = a(1 + \cos\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = a(1 + \cos\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

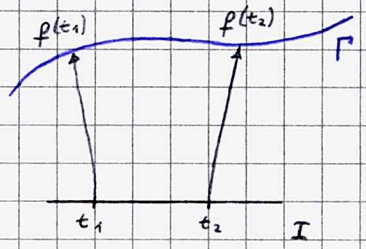


Cardioide

tiziccardo.polidoro.org

Supponiamo di avere una curva semplice aperta Γ e una sua rappresentazione parametrica f di base un intervallo I.

$$f : t \in I \to f(t) \in \Gamma$$



Supponendo $t_1 < t_2$, essendovi biunivocità sappiamo che i punti immagine sono certamente diversi tra loro; possiamo costruire una relazione di ordine stretto sui punti della curva, relazione transitiva e antisimmetrica:

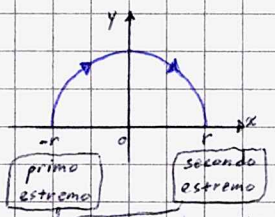
$$f(t_1) < f(t_2) \iff t_1 < t_2 \quad \forall t_1, t_2 \in I$$

La relazione d'ordine dell'esempio sui punti di Γ permette di valutare se un punto precede [segue] un altro punto della curva.
Ne segue che una qualsiasi rappresentazione parametrica di Γ indurrà la relazione di ordine stretta dell'esempio o la sua opposta; le rappresentazioni parametriche dunque si dividono in due classi disgiunte – prive di elementi in comune – ~~quella~~ una che contiene tutte le rappresentazioni parametriche di Γ che inducono la relazione d'ordine dell'esempio e l'altra che contiene quelle che inducono la relazione d'ordine opposta.

Ricordiamo che due rappresentazioni parametriche di basi diverse si ottengono tramite un omeomorfismo tra le due basi; se all'interno della stessa classe l'omeomorfismo è strettamente crescente; se appartengono a classi diverse invece l'omeomorfismo è strettamente decrescente.

Orientare una curva aperta Γ vuol dire scegliere una delle classi suddette; un orientamento è ognuna di dette classi; in una curva semplice aperta vi sono 2 orientamenti possibili.
Scelto un orientamento su Γ, Γ si dice orientata e si indica con $\vec{\Gamma}$. Una qualsiasi rappresentazione parametrica f di $\vec{\Gamma}$ si dice **concorde** [discorde] con l'orientamento scelto se f appartiene alla classe scelta [opposta].

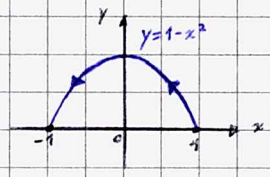
Esempi



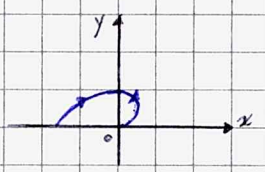
$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$ rappresentazione discorde con l'orientamento scelto

$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{r^2 - t^2} \end{cases} \quad t \in [-r, r]$; $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = -r\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [-\pi, 0]$ rappresentazioni concordi con l'orientamento

→ definibili perché la curva è orientata e dotata di estremi



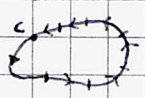
$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$ discorde ; $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$ concorde

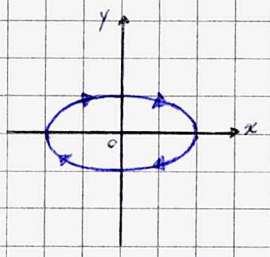


$\rho = 2\vartheta, \ \vartheta \in [0, \pi]$

$\begin{cases} x = 2\vartheta\cos\vartheta \\ y = 2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$ discorde con l'orientamento

L'orientamento di curve chiuse è formalmente più complesso, intuitivamente è però facile definirlo restringendo le curve a composizioni di archi, curve aperte dotate di estremi, aventi tutti lo stesso orientamento. ⚠ Non ha senso parlare di prima o dopo.
Le definizioni fatte per le curve aperte si ripetono analogamente.



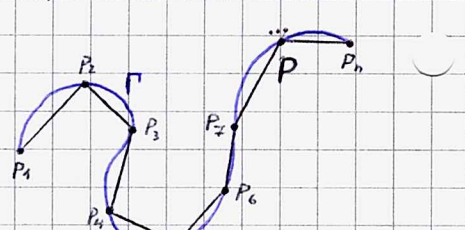


$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ la rappresentazione parametrica considerata è discorde con l'orientamento

riccardo.polidoro.org

Ricordando come i Greci misurarono la circonferenza la approssimarono con frontiere di poligoni inscritti e circoscritti utilizziamo uno stesso metodo per definire la lunghezza di una curva:

Consideriamo le poligonali inscritte nella curva, ovvero quelle aventi estremi sulla curva e con estremi consecutivi (se una curva chiusa, le poligonali sono chiuse).



Detto $\mathcal{P}$ l'insieme delle poligonali inscritte in Γ,

$$P \in \mathcal{P},\ P = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}, P_i}\ , \qquad \ell(P) = \sum_{i=1}^{n} \|P_i - P_{i-1}\|$$

Consideriamo $\{\ell(P),\ P \in \mathcal{P}\} \subseteq]0, +\infty[$, allora siamo certi che esiste $\sup_{P\in\mathcal{P}} \ell(P)$.

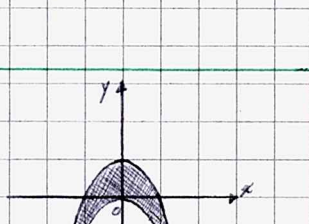
Dunque, $\sup_{P\in\mathcal{P}} \ell(P) \overset{\text{def}}{\equiv} \ell(\Gamma)$

Se $\ell(\Gamma) \in \mathbb{R}$, la curva Γ si dice rettificabile.

Esercizi su massimi e minimi

- $f(x,y) = \arcsen\sqrt{x^2+y}$

$$X: \begin{cases} 0 \le x^2+y \\ \sqrt{x^2+y} \le 1 \end{cases} ; \begin{cases} y \ge -x^2 \\ y \le 1-x^2 \end{cases}$$



f è derivabile rispetto ad x ed y dove la radice non si annulla e l'arcoseno non ha argomento pari ad 1, ovvero quando la disuguaglianza — è stretta; si osserva facilmente che la funzione è derivabile nei punti interni, ovvero quelli in cui bisogna valutare i punti stazionari $\Leftrightarrow$ non ci sono problemi per l'esercizio.

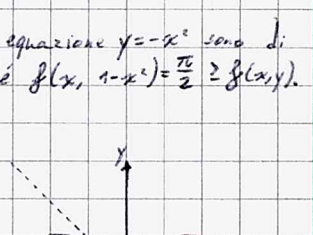
$$f_x \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y}} = 0 \\ f_y \quad \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} = 0 \end{cases} \quad \nexists$$ NON HA SOLUZIONE

Dunque non ci sono punti stazionari interni; valutiamo cosa succede sulle frontiere.

Le due funzioni componenti sono entrambe non negative (nell'insieme di definizione); possiamo dire che i punti della parabola di equazione $y=-x^2$ sono di minimo assoluto perché $f(x, x^2) = 0$; analogamente i punti di $y=1-x^2$ sono di massimo assoluto perché $f(x, 1-x^2) = \frac{\pi}{2} \ge f(x,y)$.

- $f(x,y) = \frac{|y|}{x+y}$ $\qquad X: \{(x,y) : y \neq -x\}$

L'insieme è aperto, dunque privo di punti di frontiera.



f è derivabile parzialmente rispetto ad x e rispetto a y in $X - \{y=0\}$

$$f_x \begin{cases} -\frac{|y|}{(x+y)^2} = 0 \iff y = 0 \\ f_y \quad \frac{(x+y)\,\operatorname{sgn} y - |y|}{(x+y)^2} = 0 \iff x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ è l'unico punto stazionario ma } \notin X$$

Non ci sono punti stazionari né punti di frontiera, ma i punti di non derivabilità — sull'asse x — sono estremi relativi: se l'ascissa è positiva [negativa] esiste un intorno di raggio sufficientemente piccolo tale che la funzione sia sempre con valore maggiore [minore] rispetto a quel punto.

Dunque, i punti di non derivabilità $(\bar{x}, 0)$ con $\bar{x} > 0$ sono minimi relativi non propri; $\bar{x} < 0$ sono massimi relativi.

- $f(x,y) = y^2 + xy$ in $D: [-1,1] \times [-1,1]$

$$f_x \begin{cases} y = 0 \\ f_y \quad 2y + x = 0 \iff x = 0 \end{cases}$$ $(0,0)$ unico punto stazionario interno, $f(0,0) = 0$

Ci restringiamo sui 4 lati: $\Gamma_1: \begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases} t \in [-1,1]$; $\Gamma_2: \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} t \in [-1,1]$; $\Gamma_3: \begin{cases} x=-1 \\ y=t \end{cases} t \in [-1,1]$; $\Gamma_4: \begin{cases} x=t \\ y=-1 \end{cases} t \in [-1,1]$

e consideriamo $g_1(t) = t^2+t$; $g_2(t) = t+1$; $g_3(t) = t^2-t$; $g_4(t) = 1-t$

dalla monotonia di g_2 e g_4 otteniamo che $(\pm 1, \pm 1)$ sono eventuali massimi, $(\pm 1, \mp 1)$ eventuali minimi; dallo studio delle derivate di g_1 e g_3 ricaviamo $(-1, \frac{1}{2})$ e $(1, -\frac{1}{2})$ come eventuali minimi. Confrontando i valori si ottiene che $\min_D f = -\frac{1}{4} = f(-1, \frac{1}{2}) = f(1, -\frac{1}{2})$ e $\max_D f = 2 = f(\pm 1, \pm 1)$.

riccardo.polidoro.org

Curve semplici regolari

Sia $\underline{f}$ una rappresentazione parametrica di base I della curva semplice aperta Γ. Esso si dice una rappresentazione parametrica **regolare** se:

① $\underline{f} \in C^1(I)$ ovvero derivabile, continua e con derivata continua in I

② $\underline{f}'(t) \neq \underline{0} \ \forall t \in I$, ovvero x', y', t' non si annullano contemporaneamente in uno stesso parametro t, che equivale a richiedere che $\|\underline{f}'(t)\| > 0 \ \forall t \in I$; questa seconda condizione è particolarmente utile per alcune rappresentazioni parametriche particolarmente complesse, semplificando i calcoli (ad es. coordinate polari)

Se Γ è una curva semplice aperta, essa si dice regolare se è dotata di UNA rappresentazione parametrica regolare (se esiste, ne esistono infinite, ma esistono anche rappresentazioni non regolari: un arco di parabola di equazione $y=x^2$, ad esempio con $x \in [0,1]$, ha per rappresentazione regolare quella che pone $x=t$, $y=t^2$: componenti di classe C^1 e derivate con prima componente non nulla; considerando invece $x=t^2$, $y=t^4$ la rappresentazione non è regolare: le derivate si annullano contemporaneamente in $t=0$!).

Esempi

- Il diagramma G_f di una funzione è una curva semplice aperta regolare se la funzione è di classe C^1 poiché la rappresentazione parametrica $\underline{f}: t \in I \to (t, f(t)) \in G_f$ è regolare:

  - Se f è di classe C^1, le componenti sono di classe C^1 in I
  - $x'(t) = 1$ e $y'(t) = f'(t)$, dunque si ha $\|\underline{f}'(t)\| = \sqrt{1+(f'(t))^2} > 0 \ \forall t \in I$

- Una semicirconferenza di centro O e raggio r nel semiasse positivo delle y ha una rappresentazione parametrica **non** regolare se parametrizzata come diagramma cartesiano: $\underline{f}(t) = (t, \sqrt{r^2-t^2})$ ha la seconda componente non derivabile in $\pm r$, estremi dell'intervallo di base; la rappresentazione in coordinate polari invece è regolare in tutto l'intervallo $[0, \pi]$, con norma del vettore derivata costantemente pari a r.
  Conviene dunque scartare sempre le rappresentazioni parametriche che contengono le radici se si vuole studiare la regolarità della curva.

- L'elica cilindrica, la parabola, un ramo di iperbole sono tutte curve regolari

- Se una curva Γ aperta piana ha espressione polare $\rho = \rho(\vartheta)$, $\vartheta \in I$ e $\rho \in C^1(I)$ si vede che:

$$\begin{aligned} x'(\vartheta) &= \rho'(\vartheta)\cos\vartheta - \rho(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \\ y'(\vartheta) &= \rho'(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta + \rho(\vartheta)\cos\vartheta \end{aligned} \qquad \forall \vartheta \in I$$

  Ne segue che la condizione sul vettore derivata diventa $(\rho'(\vartheta))^2 + \rho^2(\vartheta) > 0 \ \forall \vartheta \in I$.
  Da ciò si ottiene che le spirali di Archimede e logaritmiche sono curve aperte regolari.

Per quanto riguarda le curve chiuse, lo studio della regolarità permette di individuare curve lisce, con buone proprietà. Una curva semplice chiusa con rappresentazione parametrica $\underline{f}$ di base $[a,b]$ è regolare se $\underline{f}$ rispetta le seguenti condizioni:

① $\underline{f} \in C^1([a,b])$
② $\underline{f}'(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in [a,b]$
③ $\underline{f}'(a) = \underline{f}'(b)$

Logicamente, Γ si dice regolare se è dotata di una rappresentazione parametrica regolare.

Come abbiamo visto, se Γ è una curva semplice regolare essa ammette anche rappresentazioni parametriche NON REGOLARI.

riccardo.polidoro.org

Esempi

- Una circonferenza è una curva semplice chiusa regolare: supponendo abbia centro in (x_0, y_0), avremo dalla rappresentazione parametrica $x = x_0 + r\cos t$, $y = y_0 + r\operatorname{sen} t$; facendo le derivate, quadrandole e sommandole otteniamo r^2; nel punto di chiusura le derivate coincidono (derivata costante)

- Un ellisse è una curva semplice chiusa regolare: $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t \Rightarrow x'(t) = -a\operatorname{sen} t$, $y'(t) = b\cos t$, quadrando e sommando otteniamo $a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t$ con sent e cost che non si annullano in uno stesso punto $\Rightarrow$ la disuguaglianza è verificata $\forall t$.

Le curve regolari hanno una buona interpretazione geometriche, poiché sono particolarmente (REGOLARE) lisce.
Se Γ è una curva semplice regolare e $\underline{\rho}$ è una sua rappresentazione parametrica di base $[a,b]$, considerato un punto $\underline{P_0} \in \Gamma$ con $\underline{P_0} = \underline{\rho}(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$.
Si può considerare la ~~funzione~~ retta di equazione:

$$\underline{\rho} = \underline{\rho_0} + \lambda\, \underline{\rho}'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

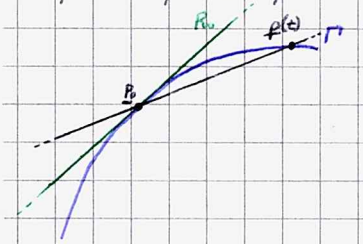
poiché il vettore derivata, che non si annulla per definizione, fornisce una direzione.

e le equazioni scalari $\begin{cases} x = x_0 + \lambda x'(t_0) \\ y = y_0 + \lambda y'(t_0) \\ [z = z_0 + \lambda z'(t_0)] \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ $[\mathbb{R}^3]$

Che si dice **retta tangente a Γ in $\underline{P_0}$.**

Osservazione: la retta tangente non dipende dalla rappresentazione parametrica scelta; esistono infinite rappresentazioni parametriche regolari ottenute con omeomorfismi di classe C^1 tra gli intervalli di base; a maggior ragione esistono infinite rappresentazioni parametriche; si ottiene una funzione composta che nella derivazione è proporzionale: $(\rho(t(\tau)))'$ è il vettore con componenti $\rho'(t(\tau)) \cdot t'(\tau) \Rightarrow \rho(t)$ e $\rho(t(\tau))$ hanno vettori proporzionali, che identificano la stessa direzione.

Il nome della retta deriva da un discorso analogo a quello fatto in Analisi I circa la retta tangente al diagramma di una funzione, ovvero la retta passante per il punto considerato cui si sovrappongono le rette secanti il diagramma, ovvero quelle passanti per due qualsiasi punti del diagramma.



Fissando due punti $\underline{P_0}$ e $\underline{\rho}(t)$, la retta secante è definita da un'equazione che esplichi il suo passaggio per $\underline{P_0}$ e la direzione pari a quella del vettore $\overrightarrow{\underline{P_0}\,\underline{\rho}(t)}$, vettore secante dato da $\underline{\rho}(t) - \underline{\rho}(t_0)$. Infatti:

$$\underline{\rho} = \underline{\rho_0} + \lambda\,(\underline{\rho}(t) - \underline{\rho}(t_0))$$

equazione della retta secante

$$\text{oppure } \underline{\rho} = \underline{\rho_0} + \frac{\underline{\rho}(t) - \underline{\rho}(t_0)}{t - t_0}\,\lambda$$

con vettore parallelo a quello di partenza (moltiplico per uno scalare, $t \neq t_0$ per Hp)

Poiché $\lim_{t \to t_0} \dfrac{\underline{\rho}(t) - \underline{\rho}(t_0)}{t - t_0} = \underline{\rho}'(t_0)$, si osserva che le rette secanti tendono a sovrapporsi alla retta tangente R_0, con vettori direzione tendenti al vettore derivata.

Nel caso in cui $\Gamma = G_f$, $f \in C^1([a,b])$, la retta tangente appena definita coincide esattamente con la retta tangente a G_f: sia $\underline{P_0} = (x_0, f(x_0)) \in G_f$ e $\underline{\rho}: t \in [a,b] \to (t, f(t)) \in \Gamma$ la rappresentazione parametrica scelta.
Allora, le equazioni parametriche della retta tangente a Γ in $\underline{P_0}$ sono:

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y = y(t_0) + \lambda y'(t_0) \end{cases} \text{ ovvero } \begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = f(x_0) + \lambda f'(x_0) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ricavando λ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, equazione della retta tangente a G_f in $(x_0, f(x_0))$.

riccardo.polidoro.org

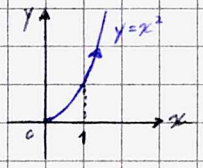
Il diagramma di una funzione però ammette retta tangente anche in alcuni punti di non derivabilità (es. cuspidi).

Se Γ è una curva semplice regolare orientata, chiameremo **versore tangente positivo** a Γ in $P \in \Gamma$ il vettore:

$$\underline{t}_P = [-] \frac{\underline{f}'(t)}{\|\underline{f}'(t)\|}$$

Se $\underline{f}$ è una rappresentazione parametrica regolare concorde [discorde] con l'orientamento: segue l'orientamento fissato sulla curva.

Esempio



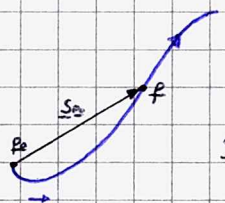
Il versore tangente positivo a Γ in $P_0 = (1,1)$, considerata la rappresentazione regolare $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$, è $\underline{t}_P = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\underline{j}$

Scegliendo la rappresentazione parametrica tale $x = -t$ e $t \in [-1, 0]$ si ottiene una rappresentazione discorde con l'orientamento; il versore tangente positivo sarebbe l'opposto di quello appena considerato (se variassimo l'orientamento).

Da ciò ricaviamo due condizioni necessarie per la regolarità di una curva:

- Se Γ è una curva semplice regolare $\Rightarrow$ in ogni punto di Γ esiste la retta tangente alla curva
- Γ è una curva semplice regolare $\Rightarrow$ in ogni punto di Γ esiste il vettore tangente alla curva.

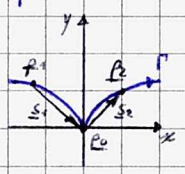
Osserviamo inoltre che il versore tangente positivo in realtà non dipende dalla rappresentazione parametrica: presa una curva orientata Γ e due suoi punti, possiamo definire il **versore secante positivo**:



$$\underline{S}_{P_0} = \frac{P - P_0}{\pm\|P - P_0\|}$$

con $\pm$ a seconda che P segua o preceda P_0 su Γ, indipendentemente dalla rappresentazione parametrica!

Se $\exists \lim_{P \to P_0} \underline{S}_P = \underline{t}_{P_0}$, esso si dice **versore tangente positivo** a Γ in P_0, è indipendente dalla rappresentazione parametrica.



Nell'esempio a fianco ($y = \sqrt{|x|}$), si osserva che — preso $P_0 = (0,0)$ — i versori secanti positivi tendono a sovrapporsi in P_0 a $\pm\underline{j}$ a seconda che provengano da ~~ordinate~~ ascisse positive o negative; ne segue che $\nexists \lim_{P \to P_0} \underline{S}_P$ poiché i versori tendono a valori diversi.

Si dimostra che se Γ è regolare e orientata, in ogni suo punto esiste sia il versore tangente positivo che la retta tangente positiva — retta tangente orientata concordemente al versore tangente positivo — ne segue che l'esistenza della retta tangente (non orientata, che nell'esempio suddetto esiste in O) non è una condizione sufficiente per definire la regolarità: deve esistere il versore tangente positivo.
È per questo motivo che per definire le curve chiuse regolari si pone $\underline{f}'(a) = \underline{f}'(b)$, in modo tale da chiudere la curva con regolarità (ma basterebbe che i due vettori siano proporzionali).
Si dimostra inoltre che se $\underline{f}$ è una rappresentazione parametrica regolare di Γ, allora $\underline{t}_{P_0} = \frac{\underline{f}'(t_0)}{\pm\|\underline{f}'(t_0)\|}$, con $\pm$ a seconda che $\underline{f}$ sia concorde o discorde con l'orientamento fissato su Γ.

Esempi

elica cilindrica $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Consideriamo $P_0 = (0, 2, \frac{3}{2}\pi)$; per comprendere da quale parametro provenga è sufficiente risolvere il sistema $\begin{cases} x(t_0) = 0 \\ y(t_0) = 2 \\ z(t_0) = \frac{3}{2}\pi \end{cases} \Rightarrow 3t = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Cerchiamo l'equazione della retta tangente in P_0, sapendo che $\underline{f}'(t_0) = (-2, 0, 3)$ otteniamo:

$$\underline{f} = (0, 2, \tfrac{3}{2}\pi) + \lambda(-2, 0, 3) \iff \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 \\ z = \frac{3}{2}\pi + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ricavando λ e sostituendola si ottiene la retta come intersezione di due piani.

riccardo.polidoro.org

ellisse $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$; $t_0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow p_0 = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} b\right)$

$r = p_0 + \lambda\, p'(t_0) \iff r = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} b\right) + p'\left(\frac{\pi}{3}\right)\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = a/2 - \frac{\sqrt{3}}{2} a\lambda \\ y = \sqrt{3}/2\, b + b/2\, \lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$

ricavando λ e sostituendola si ottiene l'equazione cartesiana in forma esplicita della retta.

Sappiamo però che non tutte le curve sono perfettamente lisce, pur avendo buone proprietà: un esempio è dato da asteroide e cardioide, curve che presentano punti cuspidali in cui esiste la retta tangente ma non il limite dei versori secanti positivi; non esistendo il versore tangente positivo le curve dunque non sono regolari.
Si osserva un importante risultato per le curve semplici piane che contribuisce a far comprendere le buone proprietà delle curve suddette:

Teorema: Ogni curva piana semplice regolare è localmente il diagramma di una funzione di classe C^1 in un intervallo di $\mathbb{R}$, ovvero:

$$\forall p_0 \in \Gamma\ \exists I_{p_0} : \underbrace{\Gamma \cap I_{p_0}}_{\text{Porzione di } \Gamma \text{ in } I} \text{ è il diagramma di una funzione di classe } C^1 \text{ in un intervallo.}$$

Valutiamo dunque le due curve, considerandone le rappresentazioni parametriche e verificando analiticamente quanto intuito geometricamente:

Asteroide: $\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ entrambe le funzioni componenti sono di classe C^1

$$x'(t) = -3r\cos^2 t \sin t$$
$$y'(t) = 3r\sin^2 t \cos t$$

La condizione sulla regolarità che richiede $p'(t) \neq \underline{0}\ \forall t$ non è verificata per $t = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Cardioide: supponiamo $a = 1$; $\rho = 1 + \cos\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$

$p'(\vartheta) \neq \underline{0} \iff \rho^2(\vartheta) + \rho'(\vartheta)^2 > 0\ \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$; sfruttiamo questo risultato:

$\rho^2(\vartheta) = (1+\cos\vartheta)^2$, $\rho'(\vartheta)^2 = \sin^2\vartheta$ $\Longrightarrow$ $\rho^2(\vartheta) + \rho'(\vartheta)^2 = \underbrace{1 + \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}_{1} + 2\cos\vartheta = 2(1+\cos\vartheta) = 0 \iff \cos\vartheta = -1 \iff \vartheta = \pi$

Escludendo i punti cuspidali però le curve rispettano le proprietà cercate $\Rightarrow$ conviene allargare la classe di curve da poter considerare.

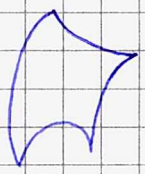
Se p è una rappresentazione parametrica di una curva semplice, p si dice **generalmente regolare** (aggettivo che implica che la proprietà vale in tutti i punti eccetto un numero finito) se:

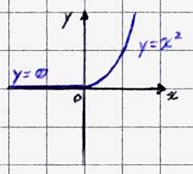
- p è derivabile in $[a, b]$.
- $p'(t)$ è continua in $[a, b]$ tranne al più che in un numero finito di punti, in cui presenta discontinuità di prima specie, ovvero in cui le funzioni componenti presentano discontinuità di prima specie (i limiti delle derivate sono diversi).
- $p'(t) \neq \underline{0}$ in $[a, b]$ tranne che in un numero finito di punti.

Γ si dice generalmente regolare se è dotata di una rappresentazione parametrica generalmente regolare: asteroide e cardioide sono curve generalmente regolari.
È anche possibile costruire curve generalmente regolari attraverso l'unione di archi, per i quali sarebbe complesso identificare una rappresentazione parametrica unica, su un unico intervallo di base; si possono però fare dei ragionamenti geometrici a riguardo.

riccardo.polloro.org

Un arco – curva aperta dotata di estremi – si dice internamente regolare se ha una rappresentazione parametrica di classe C^1 nel suo intervallo di base con derivata non nulla nei punti interni (può perdere la proprietà negli estremi).



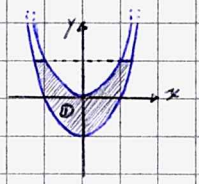


L'unione consecutiva e concatenata di archi internamente regolari è generalmente regolare; in alcuni casi può essere regolare, come nel secondo diagramma a fianco. Si dimostra che una curva generalmente regolare può essere sempre rappresentata come l'unione finita di archi internamente regolari, detti *tratti di regolarità* della curva.

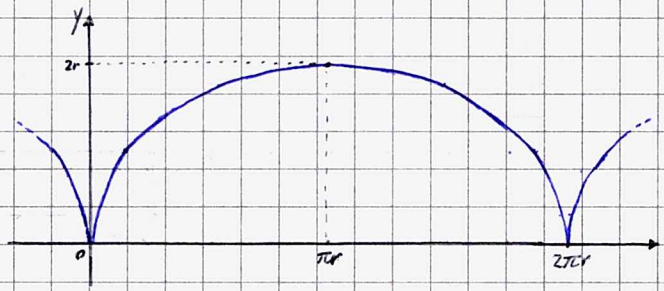
Se Γ è una curva semplice generalmente regolare, allora Γ è l'unione di un numero finito di archi internamente regolari $C_1, \dots, C_n$ tale che:

- Se $n=2$, C_1 e C_2 hanno in comune solo un estremo o solo i due estremi (non si intersecano)
- Se $n>2$, $C_2, \dots, C_{n-1}$ sono consecutive; due archi hanno in comune al più un estremo.

Dunque $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$; un esempio sono le frontiere di alcuni domini, come i domini normali.



Avendo definito le curve generalmente regolari, definiamo ora la cicloide



$$\begin{cases} x = r(t-\text{sen}t) \\ y = r(1-\cos t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Le funzioni componenti sono composte anche da funzioni periodiche; consideriamo un intervallo di ampiezza 2π ($[0, 2\pi]$) per fare valutazioni successive.

$$\begin{cases} x'(t) = r(1-\cos t) \leftarrow \text{sempre} \geq 0 \Rightarrow \text{le ascisse crescono sempre} \\ y'(t) = r \,\text{sen}\, t \end{cases}$$

$$x(t+2\pi) = r(t+2\pi - \underbrace{\text{sen}\,t}_{=\text{sen}(t+2\pi)}) = 2\pi r + x(t) \Rightarrow$$

le ascisse vengono solo traslate verso sinistra [destra]; la curva si ripete all'infinito.

La curva è dunque semplice, aperta e priva di estremi; ogni arco definito in $t \in [2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ è internamente regolare (negli estremi la derivata è nulla); l'unione finita di archi di cicloide è generalmente regolare.

Esercizio

Calcolare $\lim_{\substack{t \to 2\pi \\ [0]}} \dfrac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$ nella cicloide

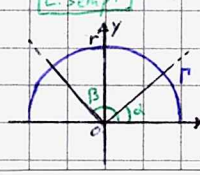
- Se una curva semplice $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ e le Γ_i sono curve semplici aperte rettificabili, allora Γ è rettificabile e $\ell(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} \ell(\Gamma_i)$.

- Se Γ è una curva semplice aperta dotata di estremi e chiusa (curva compatta), regolare o generalmente regolare, allora Γ è rettificabile.
- Se Γ è regolare e φ è una sua rappresentazione parametrica regolare di base $[a,b]$, allora $\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt$.
- Se Γ è generalmente regolare, $\ell(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} \ell(C_i)$, con C_i tratti di regolarità.

Si può pensare che i vettori secanti tendono a sovrapporsi ai vettori tangenti, la cui somma infinita (integrale) restituisce la lunghezza della curva.

Ricordando che $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + [z'(t)]^2}$, la lunghezza delle curve si calcola con integrali di funzioni irrazionali!

Esempi



$$\ell(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 \,\text{sen}^2 t + r^2 \cos^2 t} \, dt = \int_\alpha^\beta r \, dt = r(\beta - \alpha)$$

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \,\text{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

riccardo.polidoro.org

• Calcoliamo la lunghezza della cardioide:

Abbiamo osservato che per $a=1$, ovvero $\rho = 1+\cos\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$,

$$\rho^2(\vartheta) + \rho'(\vartheta)^2 = 2(1+\cos\vartheta) = \|\rho'(\vartheta)\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\vartheta)2}\, d\vartheta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2\vartheta/2 - \operatorname{sen}^2\vartheta/2}\, d\vartheta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\cos^2\vartheta/2}\, d\vartheta = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta$$

⚠ Il coseno cambia segno nell'intervallo in cui stiamo integrando, bisognerebbe considerare il coseno in valore assoluto; per la simmetria della curva però osserviamo che la lunghezza della cardioide è pari a due volte la lunghezza di arco tra 0 e π.

$$\ell(\Gamma) = 4\int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta = 4\left[2\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right]_0^{\pi} = 8 \quad \text{(se considerassimo } a \text{ generico sarebbe } 8a)$$

• Asteroide

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\operatorname{sen}^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \begin{aligned} x'(t) &= -3r\cos^2 t \operatorname{sen} t \\ y'(t) &= 3r\operatorname{sen}^2 t \cos t \end{aligned}$$

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{9r^2\cos^4 t\operatorname{sen}^2 t + 9r^2\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9r^2\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t}\, dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3r\cos t\operatorname{sen} t = 12r\left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 6r$$

con r pari all'ascissa [ordinata] delle intersezioni con gli assi in valore assoluto.

Per la simmetria della curva, la sua lunghezza è pari a 4 volte la lunghezza dell'arco nel primo quadrante, in cui entrambe le funzioni trigonometriche sono non negative.

Archi:

• Elica cilindrica: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$; $\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 4}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 1)}\, dt = 2\sqrt{2}(2\pi) = 4\sqrt{2}\pi$

• Parabola: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$, $t \in [0,1]$, $\ell(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+(2t)^2}\, dt$ Sostituiamo $2t = x \Rightarrow t = \frac{x}{2}$, $dt = \frac{dx}{2}$

$$\ell(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\, dx \quad (=)$$

Valutiamo $\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\, dx = \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = 2\sqrt{5} - \int_0^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \Rightarrow \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{2\sqrt{5} + \left[\log(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^2}{2}$

$(=) \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})$

Spirale di Archimede $\rho = k\vartheta$, $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ supponiamo $k > 0$

$$\ell(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'(\vartheta)^2}\, d\vartheta = \int_\alpha^\beta \sqrt{k^2\vartheta^2 + k^2}\, d\vartheta = \int_\alpha^\beta \sqrt{k^2(\vartheta^2+1)}\, d\vartheta = k\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\vartheta^2}\, d\vartheta = \frac{k}{2}\left(\left[\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2}\right]_\alpha^\beta + \left[\log(\vartheta+\sqrt{\vartheta^2+1})\right]_\alpha^\beta\right)$$

▸ $\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\vartheta^2}\, d\vartheta = \left[\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{\vartheta^2}{\sqrt{1+\vartheta^2}}\, d\vartheta = \left[\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\vartheta^2}\, d\vartheta + \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{1+\vartheta^2}}\, d\vartheta \Rightarrow \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\vartheta^2}\, d\vartheta = \frac{\left[\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2}\right]_\alpha^\beta + \left[\log(\vartheta+\sqrt{\vartheta^2+1})\right]_\alpha^\beta}{2}$

riccardo.polidoro.org

- **Spirale logaritmica** $\rho = e^{k\vartheta}$ supponiamo $a=1$, $k>0$, $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$

$$\ell(\Gamma) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{e^{2k\vartheta} + k^2 e^{2k\vartheta}}\, d\vartheta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} e^{k\vartheta}\underbrace{\sqrt{1+k^2}}_{\text{costante}}\, d\vartheta = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\left[e^{k\vartheta}\right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

Si osserva che mentre la lunghezza dell'arco $[0, +\infty[$ è "infinita", e la curva non è rettificabile, l'arco $]-\infty, 0]$ è rettificabile pur provenendo da un intervallo non limitato:

$$\vartheta \in]-\infty, 0], \quad \ell(\Gamma) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$$

- **Cicloide** $\begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2\cos t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, r \cdot \sqrt{1-\cos t}\, dt = \sqrt{2}\, r \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\, r \int_0^{2\pi} \sqrt{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = 2r \int_0^{2\pi} \left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right| dt = 2r \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt = 4r\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r$$

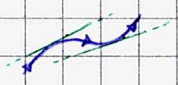
ricordiamo che $\cos t = \cos^2 t/2 - \operatorname{sen}^2 t/2$

per $t \in [0, 2\pi]$, $t/2$ varia tra 0 e π, per cui il seno è non negativo nello intervallo $\Rightarrow$ possiamo rimuovere il valore assoluto.

- **Arco di iperbole**: si esplicita la x in funzione della y, ottenendo l'integrale del prodotto di una costante per una radice della somma di un quadrato e una costante.

Come intuibile dagli esempi, se la curva è una composizione di archi ed è generalmente regolare, basterà sommare le lunghezze dei singoli archi (es. segmento + semicirconferenza + arco di parabola + ...)

Nelle curve semplici regolari piane è possibile definire la **retta normale** a Γ in P_0, retta in P_0 ortogonale a R_0, retta tangente; nello spazio dette rette sono infinite.



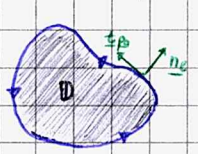
Per il Teorema di Jordan, una curva regolare piana semplice chiusa è la frontiera di un dominio $\mathbb{D}$ compatto e connesso; si dimostra che la retta normale si compone di due semirette con origine P_0, di cui una interseca Γ solo in P_0 — per il resto appartiene al complementare di $\mathbb{D}$ — detta normale esterna N_e, mentre l'altra interseca l'interno e si dice normale interna N_i.

Da ciò, considerando i vettori normali, si ottengono i versori $\underline{n}_e$ - versore normale esterno a Γ in P_0, versore di $\vec{N_e}$ - e $\underline{n}_i$, versore normale interno a Γ in P_0 e versore di $\vec{N_i}$.

Fissando un orientamento positivo (o canonico) alla frontiera di un dominio di Jordan — curva chiusa regolare o generalmente regolare, ovvero in cui non esistono versori tangente/normale al più in un numero finito di punti, ma la curva è orientabile e regolare negli archi) si hanno degli interessanti risultati.

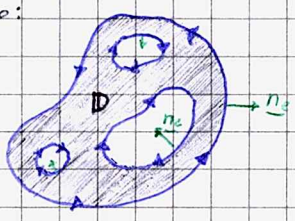
Se Γ è una curva semplice chiusa regolare o generalmente regolare ed è la frontiera di un dominio di Jordan a unico contorno, il dominio $\mathbb{D}$ si dice regolare.

Ne segue che $\Gamma = \partial\mathbb{D}$ si dice orientata positivamente (o canonicamente) se in ogni punto di regolarità P_0 di Γ risulta che la coppia $(\underline{n}_e, \underline{t}_{P_0})$ è congruente alla coppia $(\underline{i}, \underline{j})$, ovvero le due coppie sono sovrapponibili con trasformazioni rigide (traslazione, rotazione).



Come intuibile dallo schema a fianco, qualunque sia la frontiera l'orientamento positivo è quello "antiorario"

Se $\mathbb{D}$ è a più contorni, il contorno esterno resta definito come prima, mentre quelli interni sono orientati nel verso opposto:



riccardo.polidoro.org

Se $\underline{f}$ è una rappresentazione parametrica regolare concorde con orientamento positivo sulla frontiera di un dominio di Jordan $\mathcal{D}$, poiché $\underline{t}_{f_0} = f'(t_0)/\|f'(t_0)\|$ possiamo calcolare rapidamente $\underline{n}_{f_0}$: affinché la coppia di vettori sia concorde col riferimento assegnato è necessario e sufficiente che:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix} > 0$$

sappiamo che i vettori ortogonali a $(x'(t_0), y'(t_0))$ sono:
$(-y'(t_0), x'(t_0))$; $(y'(t_0), -x'(t_0))$

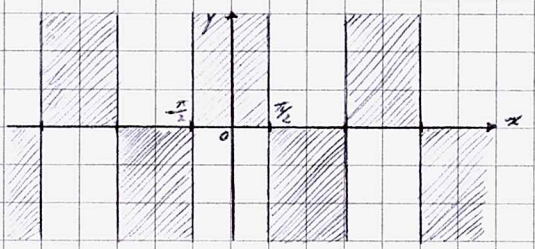
Tra i due vettori, quello concorde è logicamente il primo elencato: $\underline{n}_{f_0} = \left(-\frac{y'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}, \frac{x'(t_0)}{\|f'(t_0)\|} \right)$ ⚠ È fondamentale l'ORDINE

Esercizi

Calcolo di Massimi e Minimi

- $f(x,y) = \sqrt{y \cos x}$

$$X: \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$



La radice pone problemi di derivabilità nei punti di frontiera, ma ci interessano i punti ~~di frontiera~~ interni nella ricerca dei punti stazionari;
$\forall (x,y) \in \mathring{X}$, f è derivabile rispetto a x ed y e:

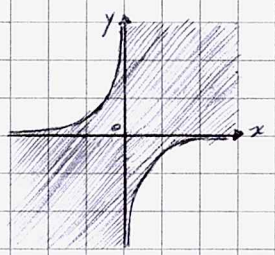
$$f_x = -\frac{y \operatorname{sen} x}{2\sqrt{y \cos x}} \; ; \quad f_y = \frac{\cos x}{2\sqrt{y \cos x}}$$

Dalla seconda derivata parziale si osserva che non può essere $\cos x = 0$ in $\mathring{X}$, poiché $\cos x = 0$ proviene da un punto di frontiera, in cui f non è derivabile; ne segue che non esistono punti stazionari interni.

Esistono però punti di minimo assoluto sulla frontiera: la funzione è per definizione non negativa, sulle rette verticali si annulla $\cos x$, mentre sull'asse x $y = 0$; in questi punti la radice è nulla; i punti $(x, 0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e i punti $\in r: x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono di minimo assoluto.

- $f(x,y) = \sqrt{x + x^2 y}$

$$X: \; x(1+xy) \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq -1/x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ xy \geq -1 \iff y \geq -1/x \end{cases}$$



Certamente assume valore minimo sulla frontiera – sui rami dell'iperbole – poiché $f(x, -1/x) = 0$; anche $f(0, y) = 0$; questi punti sono certamente di minimo assoluto.

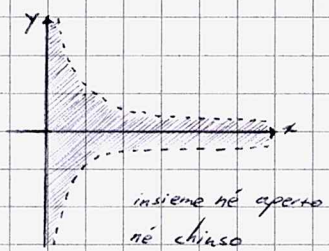
Verifichiamo se esistono estremi relativi:

$$\forall (x,y) \in \mathring{X} \Rightarrow x + x^2 y > 0, \quad f_x \begin{cases} \frac{1 + 2xy}{2\sqrt{x + x^2 y}} \\ f_y \; \frac{x^2}{2\sqrt{x + x^2 y}} \end{cases}$$

Da f_y si osserva che x non può essere uguale a 0 poiché siamo nell'interno; non esistono punti stazionari interni e dunque non esistono estremi relativi interni all'insieme di definizione.

- $\log(2 - \sqrt{xy^2})$

$$X: \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{xy^2} < 2 \iff xy^2 < 4 \iff x < 4/y^2, \; y \neq 0 \cup y = 0 \end{cases}$$



$$f_x = \frac{1}{2 - \sqrt{xy^2}} \left(-\frac{y^2}{2\sqrt{xy^2}} \right)$$

$$f_y = \frac{1}{2 - \sqrt{xy^2}} \left(-\frac{xy}{\sqrt{xy^2}} \right)$$

poiché per $y \neq 0$ $f_x < 0$, # punti stazionari interni ad X

$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathring{X}$: $\bar{x}\bar{y} = 0$, $f(\bar{x}, \bar{y}) = \log 2$. Poiché $2 - \sqrt{xy^2} \leq 2$ $\forall (x,y) \in X - \{(x,y): x = 0 \vee y = 0\}$, ed essendo la funzione logaritmo una funzione strettamente crescente – che dunque non altera la disuguaglianza – i punti di frontiera ($x = 0$) e quelli di non derivabilità ($y = 0$) sono punti di massimo assoluto

⚠: I punti stazionari si ricercano nei punti interni; gli estremi assoluti anche nei punti di frontiera e non derivabilità!

piccardo.polidoro.org

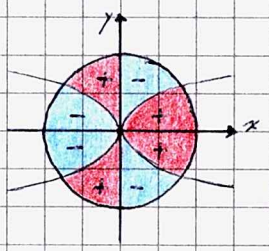
• $x^3 - xy^4 \qquad X \equiv \mathbb{R}^2$

$f_x = 3x^2 - y^4$

$f_y = -4xy^3 = 0 \iff x=0 \vee y=0$ e per $x=0$ nella prima equazione si ha $y=0$
$y=0$ nella prima equazione si ha $x=0$

L'origine è l'unico punto stazionario. Essendo il grado del polinomio alto, risulta evidente che l'Hessiano del punto sia nullo. Applichiamo dunque la definizione di estremo relativo, ragionando quando $f(x,y) \geq f(0,0) = 0$:

$x(x^2 - y^4) \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq y^4 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 \leq y^4 \end{cases}$; $x^2 = y^4 \iff |x| = y^2$

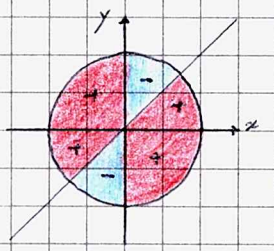


L'origine è punto di sella.

• $e^{yx-x^2} = f(x,y) \qquad X \equiv \mathbb{R}^2$

$f_x = (y-2x)\, e^{yx-x^2} = 0 \iff \begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \end{cases} \iff x=0, y=0 \Rightarrow (0,0)$ è l'unico punto stazionario.

$f_y = x\, e^{yx-x^2} = 0$



Applichiamo la definizione: $f(x,y) \geq f(0,0) = 1$

$e^{(xy-x^2)} \geq 1 \iff xy - x^2 \geq 0 \iff x(y-x) \geq 0$ → $x \geq 0, y \geq x$; → $x \leq 0, y \leq x$

L'origine è punto di sella

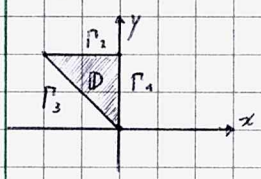
•

• $x^3 y - y^3 x = f(x,y) \qquad X \equiv \mathbb{R}^2$

$f_x \begin{cases} 3x^2 y - y^3 = 0 \iff y(3x^2 - y^2) = 0 \\ f_y \quad x^3 - 3y^2 x = 0 \iff x(x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$ Se $y=0$ dalla II eq. abbiamo $x=0$ e si osserva facilmente che l'origine è l'unico punto stazionario.

Si vede facilmente che $H(0,0) = 0$, si può tentare di ragionare ponendo $xy(x^2 - y^2) \geq 0$, oppure osservando dalle restrizioni del tipo $y = kx$ si ottiene facilmente che il punto è di sella.

• $f(x,y) = ye^x$ calcoliamo punti di massimo e minimo nella regione delimitata dal triangolo di vertici $(-1,1)$, $(0,0)$, $(0,1)$.



$f_x = ye^x$
$f_y = e^x \Rightarrow$ non esistono punti stazionari, interni a D, che essendo però un compatto ammette certamente minimo e massimo.

Considerando $\partial D = \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i$, abbiamo che $\Gamma_1 = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1]$; $\Gamma_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}, t \in [-1,0]$; $\Gamma_3 = \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \quad t \in [-1,0]$

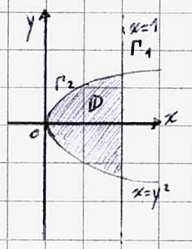
e quindi $h_1(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$; $h_2(t) = e^t$ $-1 \leq t \leq 0$; $h_3(t) = -te^t$ $-1 \leq t \leq 0$

$f(0,0) = \min h_1 = 0$ $t=0$, $f(-1,1) = \min h_2 = 1/e$ $t=-1$; $h_3'(t) = -e^t(1+t) \leq 0 \ \forall t \in [-1,0]$
$f(0,1) = \max h_1 = 1$ $t=1$, $f(0,0) = \max h_2 = 1$ $t=0$

eventuale massimo in $(-1,1)$ $(t=-1)$
eventuale minimo in $(0,0)$ $(t=0)$

Confrontando, otteniamo $f(0,0) = 0$ minimo assoluto
$f(0,1) = 1$ massimo assoluto
$f(-1,1) = 1/e$

riccardo.polidoro.org



$f(x,y) = y^2 + xy$ $\quad \begin{cases} y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$ ma $(0,0) \notin \mathring{D}$!

$\Gamma_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, t \in [-1,1]$, $\Gamma_2 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in [-1,1]$

$h_1(t) = t^2 + t$, $t \in [-1,1]$ $\qquad$ $h_2(t) = t^2 + t^3$, $t \in [-1,1]$

$h_1'(t) = 2t + 1 \geq 0 \iff t \geq -1/2$ $\qquad$ $h_2'(t) = 3t^2 + 2t = t(3t+2) \geq 0 \iff t \geq 0 \ \text{o} \ t \leq -2/3$

$(1, -1/2)$ eventuale punto di minimo $\qquad$ Dunque otteniamo che $t = 0 \Rightarrow (0,0)$ è un eventuale p.to di minimo

$t = -2/3 \Rightarrow (4/9, -2/3)$ è un eventuale punto di massimo

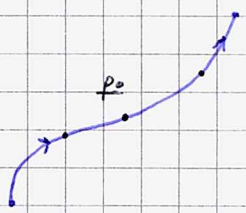
⚠ Bisogna anche trattare gli estremi dell'intervallo, in cui non vale la regolarità (VERTICI)

$f(0,0) = 0$; $f(1,-1/2) = -1/4$; $f(4/9, -2/3) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$; $f(1,1) = 2$, $f(1,-1) = 0$

Dunque il punto di massimo è proprio $(1,1)$, <u>estremo dell'intervallo</u>; punto di minimo è $(1, -1/2)$

Ascisse Curvilinee

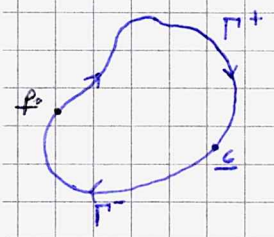
Come avvenuto nei corsi precedenti nella definizione del sistema di ascisse su una retta orientata (fissata a partire da un punto detto origine e considerando un'unità di misura rispetto al quale si definisce l'ascissa di un punto, pari a $\pm$ la lunghezza del segmento con estremi l'origine (supposto di ascissa nulla) e il punto a seconda che il punto segua o preceda l'origine stesso), definiremo un sistema di ascisse curvilinee su una curva.



Sia Γ una curva semplice aperta e dotata di estremi o chiusa, orientata e rettificabile. Fissato un punto $p_0 \in \Gamma$, si definisce: ascissa curvilinea di un punto $p \in \Gamma$ il numero:

ascissa curvilinea: $s(p) = \begin{cases} \ell(\Gamma_{p_0 p}) & \text{se } p \text{ segue } p_0 \text{ su } \Gamma \\ 0 & \text{se } p = p_0 \\ -\ell(\Gamma_{p p_0}) & \text{se } p \text{ precede } p_0 \text{ su } \Gamma \end{cases}$

È importante il cammino, non la distanza euclidea tra i due punti ma la loro distanza sulla curva.



E abbiamo introdotto un sistema di ascisse curvilinee su Γ.

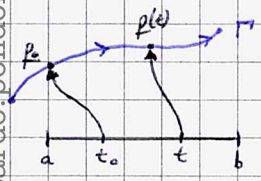
Nel caso di una curva chiusa, si fissa un punto p_0 e si individuano tramite il punto di chiusura 2 archi:

- Γ^+, avente come primo estremo p_0 e secondo punto il punto di chiusura
- Γ^-, avente come primo estremo c e secondo p_0.

In questo caso, $s(p) = \begin{cases} \ell(\Gamma_{p_0 p}) & \text{se } p \in \Gamma^+ \\ 0 & \text{se } p = p_0 \\ -\ell(\Gamma_{p p_0}) & \text{se } p \in \Gamma^- \end{cases}$

Sembra esserci ambiguità: $s(c) = \ell(\Gamma^+) = -\ell(\Gamma^-)$
è però come se considerassimo c una volta come primo estremo e una volta come ultimo estremo

Consideriamo ora una rappresentazione parametrica di base un intervallo $[a,b]$:



Si può costruire una rappresentazione parametrica di Γ direttamente dipendente dall'ascissa curvilinea, univocamente associata ad ogni punto.
Considerando la funzione composta tra $s(p)$ e $p(t)$, $(s \circ p) : t \in [a,b] \to s(p(t)) \in \mathbb{R}$
Essa è una funzione reale di una variabile reale definita nell'intervallo di base della rappresentazione parametrica; la indichiamo con $s(t) : t \in [a,b] \mapsto s(t) \in \mathbb{R}$

riccardo.polidoro.org

Si dimostra che la funzione $t \in [a,b] \to s(t) \in \mathbb{R}$ è:

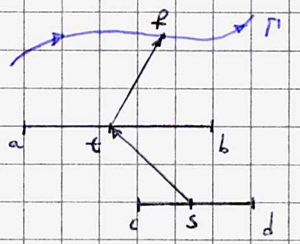
- Sempre strettamente monotona (crescente se ρ è concorde con l'orientamento, altrimenti è strett. decrescente)
- continua

Per il teorema di Bolzano (ρ è continua e definita in un intervallo) sappiamo che la funzione ha per codominio un intervallo; per il teorema di Weierstrass (ρ definita in un compatto e continua) sappiamo che il codominio è un intervallo compatto, di lunghezza pari a $\ell(\Gamma)$:

$$t \in [a,b] \to s(t) \in [c,d]$$

Essendo strettamente monotona, la funzione è certamente invertibile, e la sua inversa sarà $t(s)$ definita in $[c,d]$ e con valori in $[a,b]$, che è certamente:

- continua
- strettamente monotona, con la stessa monotonia della funzione "diretta"



La funzione $q: s \in [c,d] \to q(s) = \rho(t(s)) \in \Gamma$ è una **rappresentazione parametrica in funzione dell'ascissa curvilinea** della curva Γ, sempre definita a partire dalla rappresentazione parametrica ρ scelta.

Supponendo $\rho(t)$ concorde con l'orientamento fissato, allora $s(t)$ è strettamente crescente così come $t(s)$; componendo ρ con una funzione strettamente crescente si ottiene una rappresentazione parametrica della curva appartenente alla stessa classe di ρ.

Supponendo $\rho(t)$ discorde invece $s(t)$ e, dunque, $t(s)$ è strettamente decrescente; ne segue che la funzione composta q sarà comunque concorde con l'orientamento fissato.

Dunque la funzione $q: s \in [c,d] \to q(s) = \rho(t(s)) \in \Gamma$ è sempre concorde con l'orientamento fissato.

Questi ragionamenti si riflettono analogamente nel caso in cui Γ sia una curva chiusa; poiché $\rho(a) = \rho(b)$ si osserva che quando ci si avvicina agli estremi:

- $s(t)$ tende a $s(\rho(a)) \equiv s(c)$ non c'è ambiguità perché essendo la funzione continua quando t si avvicina ad a $\rho(t)$ tende a $\rho(a)$, e l'ascissa curvilinea tende all'opposto di $\ell(\Gamma^-)$ poiché i punti hanno ascisse curvilinee negative; avvicinandosi con t a b invece $s(\rho(t)) \to \ell(\Gamma^+)$.

- q è regolare se ρ è regolare: calcolando $s(t) = s(\rho(t))$, ovvero la lunghezza di un arco, data dallo integrale tra gli estremi dell'arco della norma del vettore derivato o il suo opposto (a seconda che ρ sia concorde o meno con l'orientamento).

$$s(t) = s(\rho(t)) = \pm \int_{t_0}^{t} \|\rho'(\tau)\| \, d\tau$$

Ne segue che l'ascissa curvilinea è una funzione integrale $\Rightarrow$ $s(t)$ è derivabile in tutto $[a,b]$ e $s'(t) = \pm\|\rho'(t)\|$ $\forall t \in [a,b]$, con $\pm$ a seconda che ρ sia concorde o discorde con l'orientamento fissato su Γ.

Essendo $s'(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$, anche $t(s)$ è derivabile in tutto $[c,d]$ e $t'(s) = 1/s'(t(s))$

Ne segue che q è derivabile in tutto $[c,d]$ e $q'(s) = \dfrac{\pm\rho'(t(s))}{\|\rho'(t(s))\|}$ $\Rightarrow$ q è una rappresentazione parametrica regolare.

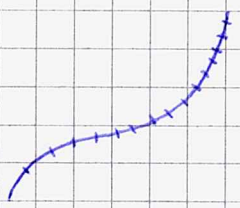
Otteniamo anche che $\|q'(s)\| = \pm 1$, con $q'(s)$ che dà il versore normale positivo

Dunque avremo una rappresentazione regolare se partiamo da una rappr. regolare e non serve normalizzare il vettore derivata: $\|q'(s)\| = 1$! 113

riccardo.polidoro.org

Integrale Curvilineo

Sia f una funzione definita e continua su una curva Γ semplice aperta con estremi o chiusa e **rettificabile**.



Se $\mathcal{D} = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ è una decomposizione di Γ in archi $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, ovvero $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$, poniamo:

- $s'_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{n} \min_{\Gamma_i} f \cdot \ell(\Gamma_i)$
- $s''_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{n} \max_{\Gamma_i} f \cdot \ell(\Gamma_i)$

somme di Riemann

archi di curva rettificabili $\Rightarrow$ rettificabili

Consideriamo $S' = \{ s'_{\mathcal{D}}, \mathcal{D} \}$ insieme di tutte le possibili somme inferiori al variare della decomposizione di Γ in archi.

$S'' = \{ s''_{\mathcal{D}}, \mathcal{D} \}$

S' ed S'' sono insiemi separati e contigui $\Rightarrow s'_{\mathcal{D}} < s''_{\mathcal{D}} \ \forall \mathcal{D}$, $\sup S' = \inf S''$ è per definizione l'**integrale curvilineo di f esteso alla curva Γ**, e si denota con:

$$\int_\Gamma f(p)\, ds$$

con ds perché è pari alla lunghezza dell'arco infinitesimo (in tutti gli integrali si considera l'elemento infinitesimo).

Valgono le proprietà già viste per gli altri integrali (linearità, finita additività, monotonia, $\left|\int \cdots\right| \le \int |\cdots|$)

Supponiamo che Γ sia anche regolare e sia p una sua rappresentazione parametrica regolare di base un intervallo $[a,b]$. Allora si dimostra che:

$$\int_\Gamma f(p)\, ds = \int_a^b f(p(t)) \cdot \| p'(t) \|\, dt$$

si ricondurre al calcolo dell'integrale di funzioni razionali in una variabile MA con la radice ($\|\cdot\|$)

Se la curva è generalmente regolare si sfrutta la proprietà di finita additività, ragionando sui tratti di regolarità (poiché f è continua)

$$\int_\Gamma f\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(p)\, ds \quad \text{con } C_1, \dots, C_n \text{ tratti di regolarità di } \Gamma$$

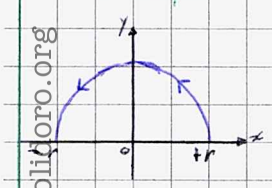
È evidente che $\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1\, ds$.

Possiamo anche definire il **baricentro** di un corpo omogeneo filiforme rappresentato da una curva semplice Γ rettificabile: è il punto di coordinate:

$$x_B = \frac{\int_\Gamma x\, ds}{\ell(\Gamma)} \qquad y_B = \frac{\int_\Gamma y\, ds}{\ell(\Gamma)} \qquad \left[z_B = \frac{\int_\Gamma z\, ds}{\ell(\Gamma)} \right]$$

In generale NON appartiene alla curva!

Esempi



Consideriamo la semicirconferenza orientata Γ e $p_0 = (r, \emptyset)$. Allora, p segue p_0 e:

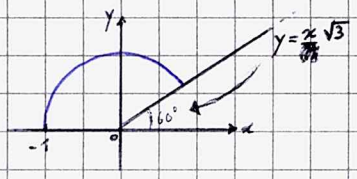
$$s(p) \begin{cases} = \emptyset \text{ se } p = p_0 \\ = \ell(\Gamma_{p_0 p}) \end{cases}$$

e, se $p(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$, $\emptyset \le t \le \pi$

avremo $s(p(t)) = \int_0^t \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 t + r^2 \cos^2 t}\, dt = rt$.

Dunque $s(t) = rt$; $t(s) = \frac{s}{r}$ e $q: s \in [\emptyset, \pi r] \to q(s) = p(t(s)) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\operatorname{sen}\frac{s}{r} \right) \in \Gamma$

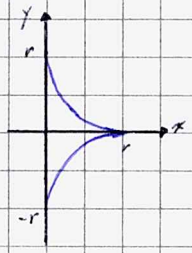
riccardo.polidoro.org



$$\int_\Gamma (x-y)\,ds \qquad f:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad t\in[\pi/3,\pi]$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\cos t-\sin t)\,\overset{\text{or, ma } r=1}{\overset{\downarrow}{r}}\,dt = \left[\sin t+\cos t\right]_{\pi/3}^{\pi} = -1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$$

La f è non negativa per le $x\geq y$, la nostra curva è contenuta nel semipiano in cui $x\leq y \Rightarrow$ l'integrale è negativo!



Calcoliamo le coordinate del baricentro del semiasteroide:

$$x_B = \frac{1}{\ell(\Gamma)}\int_\Gamma x\,ds \qquad \text{consideriamo } f:\begin{cases} x=r\cos^3 t \\ y=r\sin^3 t \end{cases},\ t\in[-\pi/2,\pi/2]$$

$$\int_\Gamma x\,ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos^3 t\left(\sqrt{9r^2\cos^2\sin^2 t}\right)dt = 3r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,\underbrace{|\sin t|}_{\text{cambia segno!}}\,dt =$$

$$= 3r^2\left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^4 t\sin t\,dt + \int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin t\,dt\right) = 3r^2\left(\left[\frac{\cos^5 t}{5}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \left[\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2}\right) = \frac{6}{5}r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B = \frac{6r^2}{5(3r)} = \frac{2}{5}r$$

poiché la lunghezza dell'asteroide è $6r$, dunque quella del semiasteroide è $3r$.

Data la simmetria della curva rispetto all'asse x, è evidente che $y_B = 0$. Infatti:

$$\frac{1}{\ell(\Gamma)}\int_\Gamma y\,ds = \frac{1}{3r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\sin^3 t\sqrt{9r^2\cos^2\sin^2 t} = \frac{3r^2}{3r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\sin^3 t|\sin t|\,dt = r\left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos t\sin^4 t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin^4 t\,dt\right) =$$

$$= r\left(-\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2}\right) = r\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = 0$$

- Baricentro dell'arco di elica cilindrica di rappresentazione parametrica $\rho(t)=(\cos t,\sin t,\sqrt{3}t)$, $t\in[0,2\pi]$, ovvero di passo $\sqrt{3}$ sulla superficie cilindrica con raggio 1

$$f:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\sqrt{3}t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi] \qquad \ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi}\sqrt{1+3}\,dt = 4\pi \qquad \left(\sqrt{(x')^2+(y')^2}\right)$$

Per la simmetria rispetto all'asse z ci aspettiamo che $x_B = y_B = 0$. Infatti:

$$x_B = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\cdot 2\,dt = 0 \qquad ; \qquad y_B = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sin t\cdot 2\,dt = 0$$

$$z_B = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{3}\,t\cdot 2\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{3}\,\pi$$

- Baricentro dell'arco di spirale logaritmica di equazione polare $\rho=e^\vartheta$, $\vartheta\in[0,\pi]$

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{\pi}\sqrt{\rho(\vartheta)^2+\rho'(\vartheta)^2}\,d\vartheta = \int_0^{\pi}\sqrt{e^{2\vartheta}+e^{2\vartheta}}\,d\vartheta = \sqrt{2}\left(e^\pi-1\right)$$

$$\int_\Gamma y\,ds = \sqrt{2}\int_0^{\pi} e^{2\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta = \sqrt{2}\left(\left[\frac{e^{2\vartheta}}{2}\sin\vartheta\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2\vartheta}\cos\vartheta\,d\vartheta\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\left[e^{2\vartheta}\cos\vartheta\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}e^{2\vartheta}(-\sin 2\vartheta)\,d\vartheta\right) \Rightarrow \frac{5}{4}\sqrt{2}\int_0^{\pi}e^{2\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(e^{2\pi}+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B = \frac{e^{2\pi}+1}{5\left(e^\pi-1\right)}$$

Si lascia per esercizio il calcolo di x_B

riccardo.polidoro.org

Calcolare $\int_\Gamma \sqrt{y^2-1}\,ds$, dove Γ è il diagramma della funzione $f(x)=e^x$ con $x\in[0,1]$.

$$\int_0^1 \sqrt{e^{2t}-1}\,\sqrt{1+e^{2t}}\,dt = \int_0^1 \sqrt{e^{4t}-1}\,dt$$

ponendo $e^{4t}=x$ abbiamo $t=\frac{1}{4}\log x$ e $dt=\frac{dx}{4x}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{e^{4t}-1}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^{e^4} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$$

che si calcola con un'ulteriore sostituzione: poniamo $\sqrt{x-1}=y$, da cui ricaviamo $x=y^2+1$ e $dx=2y\,dy$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int_1^{e^4} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^{\sqrt{e^4-1}} \frac{y^2}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e^4-1}} 1-\frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{e^4-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{e^4-1}.$$

Calcolare $\int_\Gamma x^3\,ds$, dove Γ è l'arco di parabola di equazione $y=x^2$ con $x\in[1,2]$.

Conviene vedere Γ come diagramma rispetto all'asse y della funzione $x(y)=\sqrt{y}$, con $y\in[1,4]$, evitando che nei calcoli il grado sia alto e sfruttando il fatto che non annullandosi il radicando – e non essendovi dunque punti di non derivabilità – la rappresentazione parametrica è sempre regolare.

$$f:\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=t \end{cases} \quad t\in[1,4] \quad ; \quad x'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad y'(t)=1$$

$$\int_\Gamma x^3\,ds = \int_1^4 \sqrt{t^3}\,\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^4 t\sqrt{4t+1}\,dt =$$

e l'integrale si risolve facilmente con la sostituzione $\sqrt{4t+1}=x$, da cui $t=\frac{x^2-1}{4}$ e calcoliamo:

$$= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{x^2-1}{4}\cdot x\cdot\frac{2x}{4}\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \dots$$

Lavoro e Circuitazione di un Campo Vettoriale lungo una curva semplice orientata regolare

Sia Γ una curva semplice aperta e dotata di estremi o chiusa regolare e sia $f:[a,b]\to\Gamma$ una sua rappresentazione parametrica regolare. Orientata Γ in uno dei due versi possibili, abbiamo visto che il campo vettoriale $\underline{t}: f\in\Gamma \to \underline{t}_f$ descritto dal versore tangente positivo a Γ nei punti di Γ è un campo continuo se che $\forall t\in[a,b]$:

$$\underline{t}_f(t) = \overset{+}{[-]}\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \quad \text{se } f \text{ è concorde [discorde] con l'orientamento fissato.}$$

Allora, se $\underline{v}$ è un assegnato campo vettoriale continuo in un aperto A contenente Γ, il prodotto scalare $f\in\Gamma\to \underline{v}(f)\cdot\underline{t}_f\in\mathbb{R}$ è una funzione scalare continua su Γ.

Si può dunque considerare l'integrale curvilineo esteso alla curva Γ: $\int_\Gamma \underline{v}(f)\cdot\underline{t}_f\,ds$, che è detto:

- Lavoro di $\underline{v}$ lungo Γ se la curva è aperta.
- Circuitazione di $\underline{v}$ lungo Γ se la curva è chiusa.

Si denota anche con $\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot df$

Nel caso in cui la curva sia generalmente regolare, il vettore tangente positivo non è definito in un numero finito di punti che separano tratti di regolarità; sfruttando la proprietà di finita additività possiamo considerare lavoro e circuitazione anche su curve generalmente regolari: esso è dato da

$$\sum_{i=1}^n \int_{\vec{\Gamma_i}} \underline{v}\cdot df$$

Dalla definizione di circuitazione/lavoro si osserva che variando l'orientamento della curva cambia il versore tangente positivo:

$$\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot df = -\int_{\overleftarrow{\Gamma}} \underline{v}\cdot df$$

riccardo.poloro.org

Altra proprietà fondamentale è l'additività: $\int_{\vec{\Gamma_1}\cup\vec{\Gamma_2}} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} = \int_{\vec{\Gamma_1}} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} + \int_{\vec{\Gamma_2}} \underline{v}\cdot d\underline{\rho}$

Considerando Γ regolare e una sua rappresentazione parametrica regolare, se $\underline{v}(x,y,z) = \overbrace{X(x,y,z)}^{f(x,y,z)}\underline{i} + Y(x,y,z)\underline{j} + Z(x,y,z)\underline{k}$, ovvero se X, Y e Z sono le componenti di $\underline{v}$, e Γ è contenuta in A aperto di $\mathbb{R}^3$, allora per calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \underline{v}(\underline{\rho})\cdot \underline{t}_{\underline{\rho}}\, ds$ bisogna considerare la funzione scalare:

$$\underline{v}(\underline{\rho}(t))\cdot \underline{t}_{\underline{\rho}(t)} = \frac{X(\underline{\rho}(t))\cdot x'(t) + Y(\underline{\rho}(t))\cdot y'(t) + Z(\underline{\rho}(t))\cdot z'(t)}{\pm \|\underline{\rho}'(t)\|}$$

Con $\pm$ a seconda che $\underline{\rho}$ sia concorde [discorde] con l'orientamento fissato. Allora, il suddetto integrale è dato da:

$$\pm\int_a^b X(\underline{\rho}(t))\cdot x'(t) + Y(\underline{\rho}(t))\cdot y'(t) + Z(\underline{\rho}(t))\cdot z'(t)\, dt$$

poiché bisogna moltiplicare la f per la norma di $\underline{\rho}'(t)$.

Se $\Gamma \subseteq A$ aperto di $\mathbb{R}^2$ e $\underline{v}: A \to \mathbb{R}^2$, $\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} = \pm\int_a^b X(\underline{\rho}(t))x'(t) + Y(\underline{\rho}(t))\,y'(t)\, dt$

Esempi

Circuitazione del campo vettoriale $\underline{v}(x,y) = xy\underline{i} - x\underline{j}$ lungo la circonferenza di centro O e raggio 1 orientata positivamente.

Consideriamo la rappresentazione $\underline{\rho}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, concorde con l'orientamento.

$$\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} = \int_0^{2\pi} \cos t\cdot \operatorname{sen} t\,(-\operatorname{sen} t) - \cos t\,(\cos t)\, dt = -\left[\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = -\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= -\pi$$

Lavoro del campo vettoriale $\underline{v}(x,y,z) = z\,\underline{i} - (x-y)\,k$ lungo l'arco di elica cilindrica di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi/2] \quad \text{di primo estremo } (0, 2, \pi/2)$$

Ne segue che la rappresentazione parametrica è discorde con l'orientamento, perciò:

$$\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} = -\int_0^{\pi/2} -2t\operatorname{sen} t - 2(\cos t - \operatorname{sen} t)\, dt = 2\left(\int_0^{\pi/2} t\operatorname{sen} t\, dt + \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\, dt\right) =$$

$$= \left[-2\cos t\cdot t\right]_0^{\pi/2} + 2\left[\operatorname{sen} t\right]_0^{\pi/2} + 2\left[\operatorname{sen} t\right]_0^{\pi/2} + 2\left[\cos t\right]_0^{\pi/2} = 2$$

$\underline{v}\cdot d\underline{\rho}$, ovvero il lavoro elementare, può essere visto in un modo diverso: se in $\mathbb{R}^3$, $d\underline{\rho} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k}$. Se il campo vettoriale $\underline{v}$ è un campo vettoriale continuo di componenti X, Y, Z, possiamo considerare la funzione scalare descritta dalla operazione di prodotto scalare:

$$(x,y,z) \in A \longrightarrow X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz$$, con A insieme di def. di $\underline{v}$

Questa funzione può essere immaginata come funzione di dx, dy, dz, elementi di primo grado $\Rightarrow$ fissati x, y, z, dx, dy, dz variano linearmente. È dunque naturale dire che la funzione appena definita si dica **forma differenziale lineare** in $\mathbb{R}^3$ di coefficienti X, Y, Z che supponiamo continue in A.

(X, Y, Z → componenti di $\underline{v}$)

Ricordo il differenziale di una funzione:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Talvolta più che lo studio dei campi vettoriali conviene utilizzare il linguaggio delle forme differenziali lineari, come nella Scienza delle Costruzioni.

riccardo.polidoro.org

Risulta di elementare definizione l'integrale curvilineo di una forma differenziale lineare F lungo una curva Γ orientata, semplice, aperta con estremi [chiusa], regolare:

$$\int_{\vec{\Gamma}} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \overset{\text{def}}{=} \pm \int_a^b X(\varphi(t))\,x'(t) + Y(\varphi(t))\,y'(t) + Z(\varphi(t))\,z'(t)\,dt$$

Con $\varphi(t)$ rappresentazione parametrica regolare di Γ di base $[a,b]$ e col segno $\pm$ a seconda che φ sia concorde [discorde] con l'orientamento fissato.

Formule di Gauss nel Piano

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua nell'insieme aperto A e ivi derivabile rispetto a x, con f_x continua in A. Allora, se $\mathbb{D}$ è un **dominio normale** del piano, contenuto in A, si ha che:

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \oint_{\partial \mathbb{D}^+} f(x,y)\,dy$$

$\partial\mathbb{D}^+$: orientata positivamente

Dualmente, se f è derivabile rispetto a y con f_y continua in A:

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = -\oint_{\partial \mathbb{D}^+} f(x,y)\,dx$$

scambiando le variabili cambia l'orientazione della coppia di riferimento

Un immediato e semplice esempio delle possibili applicazioni di formule di questo tipo è dato dal calcolo di aree e baricentri di domini rispondenti ai criteri suddetti:

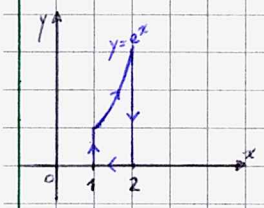
- $f(x,y) = x$ $\quad \iint_{\mathbb{D}} 1\,dx\,dy = \oint_{\partial\mathbb{D}^+} x\,dy \Rightarrow \text{area}(\mathbb{D}) = \oint_{\partial\mathbb{D}^+} x\,dy$; analogamente $\text{area}(\mathbb{D}) = -\oint_{\partial\mathbb{D}^+} y\,dx$

  Applicando la proprietà di linearità, si ottiene in generale $\text{area}(\mathbb{D}) = \frac{1}{2}\oint_{\partial\mathbb{D}^+} x\,dy - y\,dx$

- Supponendo di voler calcolare l'ascissa di un baricentro, basta porre $x = f\left(\frac{x^2}{2}\right)$ oppure $x = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e scrivere l'integrale come quello di una forma differenziale lineare, più semplice di un integrale doppio.

Esercizi

- Circuitazione del campo $\underline{v}(x,y) = x\,\underline{i} - xy\,\underline{j}$ sulla seguente frontiera:



La frontiera, evidentemente orientata negativamente, si compone di 4 tratti di regolarità:

$\Gamma_1: \begin{cases} x=2 \\ y=t \end{cases} \quad t \in [0, e^2]$ ⚠ discorde con l'orientamento ; $\Gamma_2: \begin{cases} x=t \\ y=e^t \end{cases} \quad t \in [1,2]$ concorde ; $\Gamma_3: \begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases} \quad t \in [0,e]$ concorde ; $\Gamma_4: \begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases} \quad t \in [1,2]$ discorde

$$\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{r} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\vec{\Gamma}_i} \underline{v}\cdot d\underline{r} = \ominus \int_0^{e^2} \underbrace{-2t\,dt}_{y(t)\cdot y'(t)\,dt} + \int_1^2 \underbrace{t - te^t(e^t)}_{x(t)\cdot x'(t) + y(t)\cdot y'(t)}\,dt + \int_0^e -t\,dt - \int_1^2 t\,dt =$$

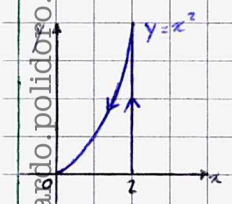
⚠: Nel calcolo di integrali curvilinei è fondamentale l'orientamento!

$$= \left[t^2\right]_0^{e^2} - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^e - \left[\frac{te^{2t}}{2}\right]_1^2 + \left(\int_1^2 \frac{e^{2t}}{2}\right) = \cdots$$

$$= \left[\frac{e^{2t}}{4}\right]_1^2$$

Osservazione: è comodo integrare lungo tratti paralleli agli assi, perché uno degli addendi non dà contributo!

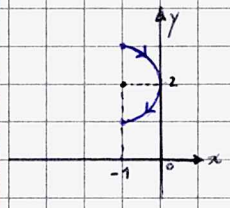
- Calcolo di un lavoro, con $\underline{v} = \operatorname{sen} x\,\underline{i} - \sqrt{y}\,\underline{j}$



$\Gamma_1: \begin{cases} x=2 \\ y=t \end{cases} \quad t \in [0,4]$ concorde ; $\Gamma_2: \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} \quad t \in [0,2]$ discorde

$$\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{r} = \int_{\vec{\Gamma}_1} \underline{v}\cdot d\underline{r} + \int_{\vec{\Gamma}_2} \underline{v}\cdot d\underline{r} = \underbrace{\int_0^4 -\sqrt{t}\,dt}_{\frac{\operatorname{sen} 2(0)}{0}} - \int_0^2 \operatorname{sen} t - \sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = -\frac{2}{3}\cdot 8 + \cos 2 - 1 + \underbrace{\frac{2}{3}}_{t^3/3} = \cdots$$

riccardo.polidoro.org



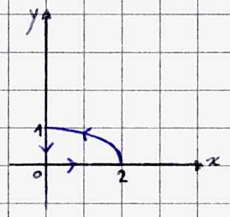
$\Gamma: \begin{cases} x = -1 + \cos t \\ y = 2 + \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$ rappresentazione discorde con l'orientamento fissato

$\underline{v}(x,y) = (x-y)\underline{i} - (x+y)\underline{j}$

$$\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v} \cdot d\underline{\rho} = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-1+\cos t - 2 - \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) - (-1+\cos t + 2 + \operatorname{sen} t)(\cos t\, dt) =$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t - \cos t - \cos^2 t - \operatorname{sen} t \cos t\, dt = -\left(\left[-3\cos t - \operatorname{sen}^2 t + \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - \frac{t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \dots = -2$$

- $\underline{v}(x,y) = (x+y)\underline{i} - (x+y)\underline{j}$



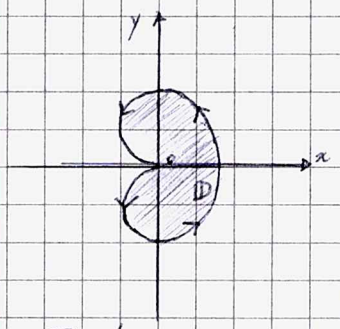
$\Gamma_1: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$ concorde ; $\Gamma_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} t \in [0,1]$ discorde ; $\Gamma_3: \begin{cases} y = 0 \\ x = t \end{cases} t \in [0,2]$ concorde

$$\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v} \cdot d\underline{\rho} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\vec{\Gamma}_i} \underline{v} \cdot d\underline{\rho} = \int_0^{\pi/2} (2\cos t - \operatorname{sen} t)(-2\operatorname{sen} t) - (2\cos t + \operatorname{sen} t)\cos t\, dt + \int_0^1 -t\, dt + \int_0^2 t\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -5\cos t \operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen}^2 t - 2\cos^2 t\, dt - \int_0^1 -t\, dt + \int_0^2 t\, dt = \dots$$

Formula di Gauss

- $\rho = 1 + \cos\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$; area$(\mathbb{D})$? $\quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos\vartheta + \cos^2\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta \end{cases}$ concorde con l'orientamento



$$\text{area}(\mathbb{D}) = \int_{\partial\mathbb{D}^+} x\, dy = \int_0^{2\pi} (\cos\vartheta + \cos^2\vartheta)\underbrace{(\cos\vartheta + \cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)\, d\vartheta}_{dy = y'(\vartheta)\, d\vartheta} =$$

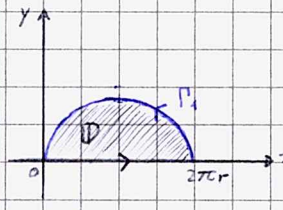
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta + \underbrace{2\cos^3\vartheta - \cos\vartheta}_{\cos\vartheta(1-\cos^2\vartheta)} - \underbrace{\cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta}_{0} + \cos^4\vartheta - \underbrace{\operatorname{sen}^2\vartheta \cos^2\vartheta}_{-\cos^2\vartheta + \cos^4\vartheta} d\vartheta = \int_0^{2\pi} 2\cos^4\vartheta\, d\vartheta = \dots = -\frac{3}{2}\pi$$

(int. parti)

In alternativa, si può osservare che $\iint_{\mathbb{D}} dx\, dy = \iint_{\mathbb{D}'} \rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\rho(\vartheta)} \rho\, d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \cos^2\vartheta + 2\cos\vartheta\, d\vartheta$

Con $\mathbb{D}' = \{(\rho,\vartheta) : \vartheta \in [0,2\pi],\ 0 \le \rho \le \rho(\vartheta)\}$ poiché $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$

⚠ Il procedimento è del tutto analogo per le altre **curve con equazioni polari** (es: $\rho = e^{\vartheta}$)



$\Gamma_1: \begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ discorde

$\Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi r]$ concorde

⚠ L'area di un dominio delimitato da un arco di cicloide è complessa da calcolare secondo il metodo standard: è difficile trovare l'espressione di una funzione che la schematizzi efficacemente.

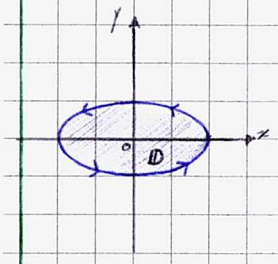
$$\text{area}(\mathbb{D}) = -\int_{\partial\mathbb{D}^+} y\, dx = \int_0^{2\pi} r^2(1-\cos t)^2\, dt - \int_0^{2\pi r} 0\, dt = 2\pi r^2 + r^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\overbrace{\operatorname{sen}^2 t}^{0}}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi r^2$$

Cerchiamo l'ascissa del baricentro, che per simmetria sappiamo essere $x_B = \pi r$:

$$x_B = \frac{1}{3\pi r^2}\iint_{\mathbb{D}} x\, dx\, dy = \frac{1}{3\pi r^2}\int_{\partial\mathbb{D}^+} \frac{2}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2}\right) dx\, dy = \frac{1}{6\pi r^2}\int_{\partial\mathbb{D}^+} x^2\, dy \overset{\text{discorde!}}{=} -\frac{1}{6\pi r^2}\int_0^{2\pi} r^2(t-\operatorname{sen} t)^2 \cdot r(\operatorname{sen} t)\, dt = -\frac{1}{6\pi r^2}\int_0^{2\pi} r^3\left[t^2\operatorname{sen} t + \underbrace{\operatorname{sen}^3 t}_{\operatorname{sen} t(1-\cos^2 t)} - 2t\operatorname{sen}^2 t \right] dt$$

$\operatorname{sen} t(1-\cos^2 t) \to 0$; $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

riccardo.polidoro.org



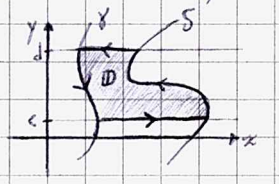
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{area}(\mathbb{D}) = \int_{\partial\mathbb{D}^+} x\,dy = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,dt \quad (\cos^2 t = \tfrac{1+\cos 2t}{2}) = ab\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi ab$$

Dimostrazione delle formule di Gauss appena descritte

Dimostriamo la I formula nel caso in cui $\mathbb{D}$ sia normale rispetto a y e la II dualmente; gli altri casi sono più complessi da dimostrare.

$$\iint_{\mathbb{D}} f_x(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\mathbb{D}^+} f(x,y)\,dy \qquad \mathbb{D} = \{(x,y) : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$$



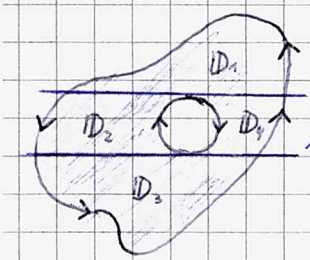
$$\iint_{\mathbb{D}} f_x(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx = \int_c^d f(\delta(y), y) - f(\gamma(y), y)\,dy$$

$$\Gamma_1: \begin{cases} x = \delta(t) \\ y = t \end{cases} \ t \in [c,d] \text{ concorde} \quad ; \quad \Gamma_2: \begin{cases} y = d \\ x = t \end{cases}, \ t \in [\gamma(d), \delta(d)] \text{ discorde} \quad ; \quad \Gamma_3: \begin{cases} y = t \\ x = \gamma(t) \end{cases} \ t \in [c,d] \text{ discorde} \quad ; \quad \Gamma_4: \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases} \ t \in [\gamma(c), \delta(c)] \text{ concorde}$$

$$\int_{\partial\mathbb{D}^+} f\,dy = \int_c^d f(\delta(t), t)\,dt - \int_c^d f(\gamma(t), t)\,dt \implies \int_{\partial\mathbb{D}^+} f\,dy = \iint_{\mathbb{D}} f_x\,dx\,dy \quad \text{QED}$$

l'integrazione interna si elide con la ~~dimostrazione~~ derivazione di dy

Le formule di Gauss però valgono in ipotesi più ampie: possono essere dimostrate per domini di Jordan regolari di qualsiasi tipo, contenuti nell'aperto A in cui è definita la funzione.
È infatti sufficiente reticolare il dominio per notare che esso può essere considerato come l'unione finita di domini normali al più adiacenti.



$$\iint_{\mathbb{D}} f_x\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{4} \iint_{\mathbb{D}_i} f_x\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\mathbb{D}_i^+} f(x,y)\,dy = \int_{\partial\mathbb{D}^+} f(x,y)\,dy$$

Consideriamo $\underline{v} \in C^1(A)$; si definisce **divergenza** di $\underline{v}$ la funzione scalare:

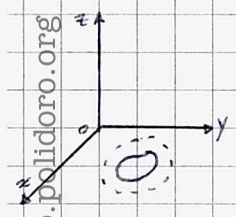
$$\operatorname{div}\underline{v} : (x,y,z) \in A \to \frac{\partial X}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Y}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial Z}{\partial z}(x,y,z)$$

essa è certamente continua in A.

Da un campo $\underline{v} \in C^1(A)$ è inoltre possibile costruire un altro campo vettoriale, detto **rotore** di $\underline{v}$, certamente continuo in A poiché $\underline{v} \in C^1(A)$:

$$\operatorname{rot}(\underline{v}) : (x,y,z) \to \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\underline{k}$$

Esso è costituito da derivate incrociate, che possono essere FORMALMENTE ricordate considerando $\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X & Y & Z \end{pmatrix}$



Se $\underline{v} : (x,y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \to X(x,y)\underline{i} + Y(x,y)\underline{j}$, $\underline{v} \in C^1(A)$,

$$\operatorname{rot}\underline{v} : (x,y) \in A \to \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\underline{k}$$

E $\operatorname{rot}\underline{v} \cdot \underline{k} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \in \mathbb{R}$.

riccardo.polidoro.org

Teorema di Stokes nel Piano

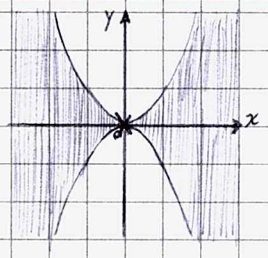
Se $\underline{v} \in C^1(A)$, con A aperto di $\mathbb{R}^2$, allora qualunque sia il dominio $\mathbb{D}$ regolare contenuto in A si ha che:

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\,dy = \int_{\partial \mathbb{D}^+} X\,dx + Y\,dy, \qquad \text{ottenuto applicando Gauss.}$$

ovvero $$\iint_{\mathbb{D}} \operatorname{rot} \underline{v} \cdot \underline{k}\, dx\,dy = \int_{\partial \mathbb{D}^+} \underline{v} \cdot d\underline{\ell}$$

Esercizi

- $\arccos\left(\frac{y}{x^2}\right)$ $\qquad X: \begin{cases} x \neq 0 \\ -x^2 \le y \le x^2 \end{cases}$ né chiuso né aperto, non limitato

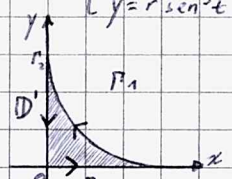


$(x,y) \in \mathring{X}$,
$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}} \left(-\frac{2y}{x^3}\right) = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \end{cases}$$
$\nexists$ punti stazionari interni: la seconda equazione non può essere soddisfatta!

Osserviamo però che $\min_X f = 0 = f(x, x^2)$; $\max_X f = \pi = f(x, -x^2)$, entrambi con $x \neq 0$

- Area di un asteroide: calcolo con la formula di Gauss nel piano

$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, $\text{area}(\mathbb{D}) = 4\,\text{area}(\mathbb{D}')$ con $\mathbb{D}'$ porzione di $\mathbb{D}$ data da t nel primo quadrante e gli assi.



Sfruttando la I formula di Gauss, otteniamo che $\text{area}(\mathbb{D}') = \int_{\partial \mathbb{D}'^+} x\,dy = \int_{\Gamma_1} x\,dy$ ⊖

se una delle due componenti è nulla, ovvero se il tratto è // agli assi, il singolo integrale dà contributo nullo!

$= \int_0^{\pi/2} r\cos^3 t\,(3r\sin^2 t \cos t)\,dt$ ($\sin^2 t = 1-\cos^2 t$) non conveniente: si ottiene un $\cos^6 t$!

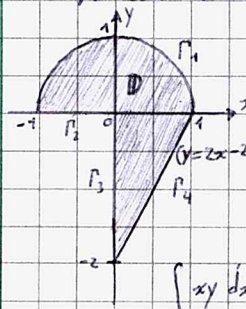
In casi simili conviene utilizzare la **terza formula dell'area**:

$$\text{area}(\mathbb{D}') = \frac{1}{2}\int_{\partial \mathbb{D}'^+} -y\,dx + x\,dy = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^4 t \sin^2 t + r^2 \sin^4 t \cos^2 t\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t \sin^2 t\,dt = \frac{3r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \sin t)^2\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{3}{8}r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt \quad (\sin^2 2t = \tfrac{1-\cos 2t}{2}) = \frac{3}{8}r^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{32}r^2$$

$\Rightarrow \text{area}(\mathbb{D}) = \frac{3}{8}r^2$

- Ascissa del baricentro. $\text{area}(\mathbb{D}) = \pi/2 + 1$ (geometria elementare) Conviene usare le formule di Gauss, altrimenti $\mathbb{D}$ dovrebbe essere spezzato in due domini normali



Possiamo certamente trascurare l'integrale lungo Γ_2 e Γ_3

$$\iint_{\mathbb{D}} x\,dx\,dy = -\int_{\partial \mathbb{D}^+} xy\,dx = -\sum_{i=1}^{4} \int_{\vec{\Gamma}_i} xy\,dx = -\left(\int_{\vec{\Gamma}_1} xy\,dx + \int_{\vec{\Gamma}_4} xy\,dx\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow x_B = \frac{1}{3\pi+6}$$

(II formula)

$\int_{\vec{\Gamma}_1} xy\,dx = \int_0^{\pi} \cos t \sin t (-\sin t)\,dt = \left[-\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = 0$; $\int_{\vec{\Gamma}_4} xy\,dx = \int_0^1 t(2t-2)\,dt = 2\int_0^1 t^2 - t\,dt = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$

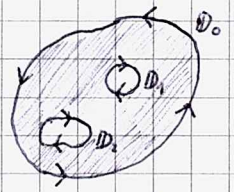
Γ_1 con Γ_2 $\qquad$ $-1/3$

$\vec{\Gamma}_4$: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t-2 \end{cases}$ $t \in [0,1]$

riccardo.polidoro.org

Precisazione: Le formule di Gauss nel piano nel caso di un dominio di Jordan è esteso a un oggetto dato dall'unione di curve semplici generalmente regolari chiuse (contorni), è dunque il risultato della somma delle circuitazioni lungo le curve orientate in maniera canonica

$$\int_{\partial \mathbb{D}^+} f(x,y)\,dy \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{n} \int_{\partial \mathbb{D}_i^+} f(x,y)\,dy$$



Teorema della divergenza: Altra conseguenza delle formule di Gauss: definita la divergenza di una funzione $\underline{f}$:

divergenza di $\underline{f}$: $X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, X aperto, $\underline{f} \in C^1(X)$:

$$\operatorname{div} \underline{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \qquad \text{funzione scalare}$$

Nelle nostre applicazioni consideriamo $\underline{v}(x,y) = X(x,y)\underline{i} + Y(x,y)\underline{j}$, di classe $C^1(X)$.

Se $\underline{v}$ è $C^1(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^2$, allora qualunque sia il dominio di Jordan regolare $\mathbb{D}$ contenuto in A (a uno o più contorni):

$$\iint_{\mathbb{D}} \operatorname{div} \underline{v}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy + \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial Y}{\partial y}\,dx\,dy \quad (=)$$

Applicando le formule di Gauss: $(=) \int_{\partial \mathbb{D}^+} X\,dy - \int_{\partial \mathbb{D}^+} Y\,dx = \int_{\partial \mathbb{D}^+} X(x,y)\,dy - Y(x,y)\,dx$ — int. di una forma differenziale

Considerando un dominio regolare a unico contorno e una rappresentazione parametrica regolare concorde con l'orientamento canonico di $\partial \mathbb{D}^+$, di base un intervallo $[a,b]$, ovvero se $\underline{\varphi}: [a,b] \to \Gamma = \partial \mathbb{D}$ è regolare,

$$\int_{\partial \mathbb{D}^+} X(x,y)\,dy - Y(x,y)\,dx = \int_a^b -Y(x(t),y(t))\,x'(t) + X(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt = \int_a^b Y(x(t),y(t))(-x'(t)) + X(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \underline{v}(\underline{\varphi}(t)) \cdot \underline{n_e}(\underline{\varphi}(t)) \underbrace{\|\underline{\varphi}'(t)\|}\,dt = \int_{\partial \mathbb{D}} \underline{v} \cdot \underline{n_e}\,ds$$

Dunque, $\int_{\partial \mathbb{D}^+} X\,dy - Y\,dx$ può essere interpretato come un integrale curvilineo!

In particolare, se $\underline{v}$ rappresenta un campo di forze, $\int_{\partial \mathbb{D}} \underline{v} \cdot \underline{n_e}\,ds$ si dice **flusso uscente da $\partial \mathbb{D}$ di $\underline{v}$.**

Se $\mathbb{D}$ è a più contorni, il flusso uscente è la somma dei flussi uscenti dalle frontiere dei singoli domini.

Ricordiamo che

L'orientamento positivo della frontiera è quello per cui la coppia $(\underline{n_e}, \underline{t})$ è concorde con la coppia $(\underline{i}, \underline{j})$.
Da ciò discende, noto $\underline{t}$, l'espressione del normale esterno attraverso il calcolo:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix} > 0$$ se la rappr è concorde con l'orientamento

dunque si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \frac{y'(t)}{\|\underline{\varphi}'(t)\|} & \frac{-x'(t)}{\|\underline{\varphi}'(t)\|} \\ \frac{x'(t)}{\|\underline{\varphi}'(t)\|} & \frac{y'(t)}{\|\underline{\varphi}'(t)\|} \end{vmatrix}$$

Il teorema dunque afferma che $\iint_{\mathbb{D}} \operatorname{div} \underline{v}\,dx\,dy = \int_{\partial \mathbb{D}} \underline{v} \cdot \underline{n_e}\,ds$, detto flusso uscente da $\partial \mathbb{D}$ di $\underline{v}$.

riccardo.polidori.org

Consideriamo ora una forma differenziale lineare in una variabile $X(x)\,dx$; sappiamo che se $X(x)$ è continua in un intervallo esso ammette certamente una primitiva, funzione la cui derivata coincide con X, derivabile nello stesso intervallo.

Analogamente si definisce la primitiva di forme differenziali in 2 o 3 variabili:

> La primitiva di $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ è una funzione $U: (x,y,z) \in A \to U(x,y,z) \in \mathbb{R}$ derivabile parzialmente rispetto a x,y,z in A e tale che:
>
> $$\frac{\partial U}{\partial x} = X \,,\ \frac{\partial U}{\partial y} = Y \,,\ \frac{\partial U}{\partial z} = Z \qquad \text{in } A$$

Con il linguaggio dei campi vettoriali otteniamo:

$$\underline{v}(x,y,z) = X(x,y,z)\,\underline{i} + Y(x,y,z)\,\underline{j} + Z(x,y,z)\,\underline{k}$$

Lo stesso oggetto si definisce **potenziale scalare di $\underline{v}$.**
Un potenziale scalare di $\underline{v}$ è una funzione U tale che $\nabla U = \underline{v}$ in A. Se un campo vettoriale è dotato di potenziale scalare, esso si dice **campo vettoriale conservativo** (o campo gradiente) in A; la forma differenziale associata si dice **esatta in A** (è esattamente il differenziale di una funzione).

Come per le primitive di funzioni in una variabile, se U è un potenziale scalare di $\underline{v}$ [una primitiva di una forma differenziale] $\Longrightarrow U + c$ è un potenziale scalare di $\underline{v}$ [una primitiva della forma differenziale] $\forall c \in \mathbb{R}$.

Si può dimostrare che:

Teorema: Se U_1 e U_2 sono entrambi potenziali scalari di $\underline{v}$, allora la loro differenza è costante se $\underline{v}$ è continuo in A aperto connesso.

Dim
Per ipotesi si ha che $U_1 - U_2$ è una funzione di classe $C^1(A)$ perché differenza di funzioni di classe $C^1(A)$; si ha inoltre che $\nabla(U_1 - U_2) = \nabla U_1 - \nabla U_2 = \underline{v} - \underline{v} = \underline{0}$ in A.
Ne segue, per il teorema di Lagrange, che la funzione $U_1 - U_2$ è certamente costante in A □

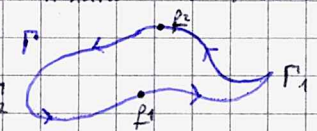
Da ora si supporre sempre $\underline{v}$ continuo in A aperto!

Condizione NECESSARIA affinché un campo sia conservativo

Se $\underline{v}$ è continuo in A aperto e $\underline{v}$ è conservativo in A, allora il lavoro lungo una qualsiasi curva aperta con estremi regolare o generalmente regolare contenuta in A dipende solo dagli estremi e dall'orientamento di Γ.

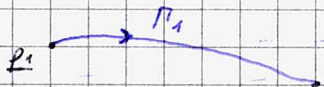
Da ciò discende una condizione necessaria anche per le curve chiuse:

Se $\underline{v}$ è un campo continuo in un aperto A e ivi conservativo allora la circuitazione lungo una qualsiasi curva semplice chiusa regolare o generalmente regolare contenuta in A è NULLA:



$$\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} = \int_{\vec{\Gamma}_1} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} + \int_{\vec{\Gamma}_2} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} = \int_{\vec{\Gamma}_1} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} - \int_{\vec{\Gamma}_2} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} = 0 \quad \text{poiché}$$

il lavoro lungo una qualsiasi curva aperta è uguale alla differenza di potenziale agli estremi e i due lavori coincidono □



Sia U un potenziale scalare di $\underline{v}$ in A; P_1 P_2
Calcoliamo il lavoro di $\underline{v}$ lungo una curva aperta regolare di primo estremo P_1; consideriamo una rappresentazione parametrica $\underline{\rho}$ di Γ di base $[a,b]$ regolare e concorde con l'orientamento; $\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{\rho} = \int_a^b X(\underline{\rho}(t))x'(t) + Y(\underline{\rho}(t))y'(t) + Z(\underline{\rho}(t))z'(t)\,dt =$

$$= \int_a^b \frac{\partial U}{\partial x}(\underline{\rho}(t)) + \frac{\partial U}{\partial y}(\underline{\rho}(t)) + \frac{\partial U}{\partial z}(\underline{\rho}(t))\,dt =$$

$$= \int_a^b \nabla U(\underline{\rho}(t))\cdot \underline{\rho}'(t)\,dt = \int_a^b (U\circ\underline{\rho})'(t)\,dt =$$

$$= U(P_2) - U(P_1)$$

riccardo.polidoro.org

Entrambe queste condizioni necessarie sono anche **sufficienti**:

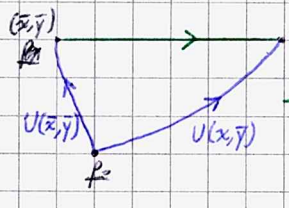
Se $\underline{v}$ è un campo continuo nel connesso A e il lavoro lungo una qualsiasi curva aperta con estremi contenuta in A, regolare o generalmente regolare, dipende solo dagli estremi e dall'orientamento di Γ, si dimostra che $\underline{v}$ è conservativo in A.
Fissato un qualsiasi punto $p_0 \in A$, un potenziale di p è U: $p \in A \to \int_{p_0}^{p} \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds$, ovvero il lavoro lungo una curva aperta regolare o generalmente regolare di primo estremo p_0 e secondo estremo p: come per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la primitiva U è costruita attraverso una **funzione integrale** (NON È UN INTEGRALE DEFINITO)

Dimostrazione per $n=2$

Fissiamo $\bar{p} = (\bar{x},\bar{y}) \in A$ e calcoliamo $U(x,\bar{y}) - U(\bar{x},\bar{y}) = \int_{p_0}^{(x,\bar{y})} \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds - \int_{p_0}^{(\bar{x},\bar{y})} \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds =$ (incremento della f rispetto a x)

$$= \int_{p_0}^{(x,\bar{y})} \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds + \int_{(\bar{x},\bar{y})}^{p_0} \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds = \int_{(\bar{x},\bar{y})}^{(x,\bar{y})} \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds \quad (=)$$

dalla → , ottenuta perché per ipotesi il lavoro dipende solo dagli estremi e dall'orientamento, si ottiene una rappresentazione parametrica concorde con l'orientamento che ⇒



→ è più comodo per il calcolo del lavoro: $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=\bar{y} \end{cases}$, $t \in [\bar{x},x]$

$$\Rightarrow (=) \int_{\bar{x}}^{x} X(t,\bar{y})\,dt$$

Per il Teorema della media sappiamo che esiste un punto c_x "compreso" tra x e $\bar{x}$ tale che: ~~$U(x,\bar{y}) - U(\bar{x},\bar{y})$~~

$$U(x,\bar{y}) - U(\bar{x},\bar{y}) = \int_{\bar{x}}^{x} X(t,\bar{y})\,dt = X(c_x,\bar{y})(x-\bar{x})$$

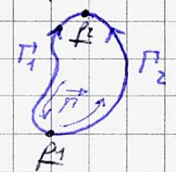
Si ottiene dunque che $\dfrac{U(x,\bar{y}) - U(\bar{x},\bar{y})}{x-\bar{x}} = \dfrac{1}{x-\bar{x}} \displaystyle\int_{\bar{x}}^{x} X(t,\bar{y})\,dt = X(c_x,\bar{y}) \quad \forall x \neq \bar{x}$.

Si ottiene che quando x tende a $\bar{x}$, anche c_x tenderà a $\bar{x}$; essendo X continua, poiché $\lim_{x\to\bar{x}} X(c_x,\bar{y}) = X(\bar{x},\bar{y})$, allora anche $\dfrac{U(x,\bar{y}) - U(\bar{x},\bar{y})}{x-\bar{x}}$ ha il limite uguale a $X(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = X(\bar{x},\bar{y})$

(Analogo per y con un segmento $\parallel$ all'asse y)

Se $\underline{v}$ è un campo continuo nel connesso A, se la circuitazione di $\underline{v}$ lungo una qualsiesi curva chiusa regolare o generalmente regolare è nulla, allora $\underline{v}$ è conservativo$_*$ in A.

Dim
Siano Γ_1 e Γ_2 curve semplici aperte regolari o generalmente regolari contenute in A, entrambe di primo estremo p_1 e di secondo estremo p_2; la loro unione è una curva semplice chiusa generalmente regolare.



Ne segue che per ipotesi $\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{r} = 0$

$$\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{r} = \int_{\vec{\Gamma}_2} \underline{v}\cdot d\underline{r} + \int_{\vec{\Gamma}_1} \underline{v}\cdot d\underline{r} = \int_{\vec{\Gamma}_2} \underline{v}\cdot d\underline{r} - \int_{\overleftarrow{\Gamma}_1} \underline{v}\cdot d\underline{r} \Rightarrow \int_{\vec{\Gamma}_2} \underline{v}\cdot d\underline{r} = \int_{\vec{\Gamma}_1} \underline{v}\cdot d\underline{r}$$

Sia $\underline{v} \in C^1(A)$ con A aperto connesso;

Se $\underline{v}$ è conservativo e U è un suo potenziale scalare, allora $U \in C^2(A)$; vale inoltre il teorema di Schwartz: è invertibile l'ordine di derivazione delle derivate seconde miste.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

$$\text{Hp.} \parallel \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad \parallel \text{Hp. } (U \text{ potenziale})$$

In $\mathbb{R}^3$ si ottiene che $\dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}$

Dunque in un campo conservativo $\operatorname{rot}\underline{v} = \underline{0}$ in A NECESSARIAMENTE; si dice che $\underline{v}$ è **irrotazionale** in A.
Se $\operatorname{rot}\underline{v} \neq 0$ non è conservativo!

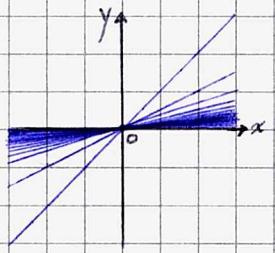
riccardo.polidoro.org

Successioni di Funzioni (I)

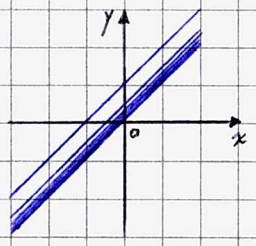
È una legge che a ogni numero naturale associa una funzione, si indica con $(f_n)_n$ e si suppone che le funzioni siano definite in uno stesso sottinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$

Esempi

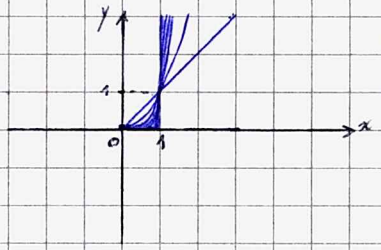
$f_n(x) = \frac{x}{n}$



$f_n(x) = x + \frac{1}{n}$



$f_n(x) = x^n$
supponiamo $x > 0$



Se $\exists \lim_n f_n(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, diremo che, se $\bar{x} \in X$ insieme di definizione, $(f_n)_n$ **converge** in $\bar{x}$.

Può accadere dunque che la funzione converga solo in alcuni punti x: infatti, per $x > 1$ la successione $f_n(x) = x^n$ non converge!

Per la successione:

- $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $\lim_n \frac{\bar{x}}{n} = 0 \ \forall \bar{x} \in X$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $\lim_n x + \frac{1}{n} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f_n(x) = x^n$, $\lim_{\substack{n \\ x \in [0,1]}} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

$(f_n)_n$ **converge puntualmente** ("punto per punto") in $Y \subseteq X$ se $\forall x \in Y$ esiste finito $\lim_n f_n(x)$; essendo il limite unico (t. di unicità del limite) a ogni x si può associare il suo limite; la funzione $f: x \in Y \to f(x) = \lim_n f_n(x)$ si dice **limite** di f.

Per le successioni dell'esempio otteniamo che:

- $\left(\frac{x}{n}\right)_n$ converge puntualmente verso la funzione $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\left(x + \frac{1}{n}\right)_n$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ verso $f(x) = x$
- $(x^n)_n$ converge puntualmente in $[0,1]$ verso $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

può succedere dunque che le proprietà delle funzioni si traducano nel limite puntuale delle funzioni componenti la successione.

Ricordando la definizione di limite, si ottiene che $(f_n)_n$ converge puntualmente verso f in $Y \subseteq X \overset{\text{def}}{\iff}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \overset{\forall x \in Y,}{\forall} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{\varepsilon, x}{m \in \mathbb{N}} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \ge m_{\varepsilon,x}$$

l'indice m dipende da ε e dal punto x, poiché $(f_n)_n$ converge puntualmente $\Rightarrow \forall x \in Y$.

Ad esempio,
- $\frac{|x|}{n} - 0 < \varepsilon \iff n > \frac{|x|}{\varepsilon}$ dipende sia da x che da ε!!
- $\left|x + \frac{1}{n} - x\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ non c'è dipendenza da x, caso particolare che determina una convergenza particolare.
- $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ converge puntualmente a $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$; per $x = 0$ $f_n(x) - f(x) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
  per $0 < x < 1$, $x^n < \varepsilon \iff n > \frac{\log \varepsilon}{\log x} = \log_x \varepsilon$

quando x tende a 1 il rapporto tende a ∞ e non si trova n.

Se però consideriamo $x \in [0,a]$ con $a < 1$, $x^n < a^n < \varepsilon$ $\Rightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log a}$ verifica il lim $\forall x \in [0,a]$!

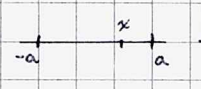
Una successione di funzioni **converge uniformemente** in $Y \subseteq X$ verso una funzione f se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \ge m, \ \underbrace{\forall x \in Y}_{\text{la condizione dunque non dipende da } x!}$$

riccardo.polidoro.org

- $\left(x+\frac{1}{n}\right)_n$ converge uniformemente verso $f(x)=x$ in $\mathbb{R}$

- $\left(\frac{x}{n}\right)_n$ NON converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ verso $f(x)=0$ ma vi converge uniformemente in un qualsiasi compatto:



$\frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n} < \varepsilon \rightarrow n > a/\varepsilon$

- $(x^n)_n$ NON converge uniformemente in $[0,1]$ verso $f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } 0\leq x<1\\ 1 & \text{se } x=1\end{cases}$ ma converge uniformemente in $[0,a]$ con $a<1$

Si osserva dunque che se una successione converge uniformemente allora essa converge puntualmente.

Teorema sulla continuità del Limite

Se $(f_n)_n$ è una successione di funzioni continue in un qualsiasi intervallo I che converge uniformemente verso la funzione f in ogni $[a,b]\subseteq I$ allora f è certamente continua in tutto l'intervallo I.

Torniamo ai Campi Vettoriali

Se $\underline{v}\in C^1(A)$ è conservativo, $\underline{v}$ è irrotazionale in A $(\text{rot}\,\underline{v}=\underline{0})$

(in GENERALE) importante condizione necessaria (utile per verificare quali campi vettoriali sono certamente NON conservativi)

- $\underline{v}(x,y)=xy^2\underline{i}-y\underline{j}$; $X_y=2xy$, $Y_x=0$ funzioni tra loro diverse $\Rightarrow$ $\underline{v}$ non è conservativo $(\text{rot}\,\underline{v}\neq\underline{0})$

- $\underline{v}(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}\underline{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\underline{j}$ X: $X_y=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=Y_x \Rightarrow \text{rot}\,\underline{v}=\underline{0}$ MA $\underline{v}$ non è conservativo:

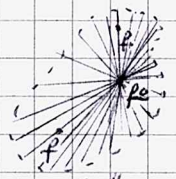
Sfruttiamo la condizione sufficiente sulla circuitazione lungo curve chiuse, considerando una qualsiasi circonferenza di centro l'origine e raggio r, orientata in maniera canonica: $\begin{cases}x=r\sin t\\ y=r\cos t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

$$\int_{\vec{\gamma}}\underline{v}\cdot d\underline{r}=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{r\sin t}{r^2}\right)(-r\sin t)+\left(\frac{r\cos t}{r^2}\right)(r\cos t)\,dt=\int_0^{2\pi}\sin^2 t+\cos^2 t\,dt=2\pi\neq 0$$

Teorema di Poincaré

Se $\underline{v}$ è un campo vettoriale di classe C^1 in un aperto A **stellato** (ovvero convesso rispetto a un punto $\underline{p}\in A$) e $\underline{v}$ è irrotazionale in A, allora $\underline{v}$ è anche conservativo in A.

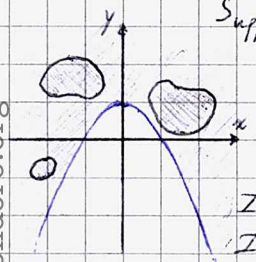
Un insieme convesso è stellato $\forall \underline{p}\in A$



Aperto Stellato

Si vede facilmente che, considerando ad esempio $U(x,y)=\text{arctg}\,y/x$ con $x>0$ il campo $\underline{v}$ dell'esempio verifica il teorema di Poincaré, definito nell'insieme convesso dato da $x>0$

Supponiamo adesso che $A\subseteq\mathbb{R}^2$. Esso si dice **semplicemente connesso** (o a connessione lineare semplice) se:



- è connesso
- ogni curva semplice chiusa contenuta in A è la frontiera di un dominio di Jordan tutto contenuto in A

Il piano bucato è connesso ma NON semplicemente connesso! Un dominio di Jordan è un insieme chiuso. Insiemi stellati e convessi sono semplicemente connessi.

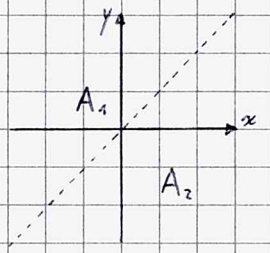
Teorema

Se $\underline{v}\in C^1(A)$ è un campo irrotazionale in A, aperto semplicemente connesso in $\mathbb{R}^2$, allora $\underline{v}$ è conservativo in A

Dim Se Γ è una curva semplice chiusa generalmente regolare contenuta in A, allora Γ è la frontiera di un dominio di Jordan regolare contenuto in A. Applicando il Teorema di Stokes, la circuitazione lungo Γ $\int_{\vec{\Gamma}}\underline{v}\cdot d\underline{r}=\int_{\partial\vec{D}^+}\underline{v}\cdot d\underline{r}=\iint_D \text{rot}\,\underline{v}\cdot\underline{k}\,dx\,dy=0$ $(\text{rot}\,\underline{v}\overset{Hp}{=}\underline{0})$ □

riccardo.solidoro.org

Se l'insieme è non connesso ma costituito da un numero finito [numerabile] di componenti connesse, aperti disgiunti; se ogni componente è semplicemente connessa si possono considerare i potenziali scalari e valutare l'irrotazionalità di $\underline{v}$ nelle componenti:



$$U(x,y) = \begin{cases} U_1(x,y) & \text{se } (x,y) \in A_1 \\ U_2(x,y) & \text{se } (x,y) \in A_2 \end{cases}$$

è certamente un potenziale scalare di $\underline{v}$

Procedimento negli esercizi:

1. Insieme di definizione A del campo vettoriale $\underline{v}$.
2. Stabilire se $\underline{v} \in C^1(A)$.
3. Verificare le proprietà di A (aperto, connesso, stellato, convesso, semplicemente connesso...)
4. Se non connesso, verificare se le componenti sono semplicemente connesse.
5. Stabilire se $\underline{v}$ è irrotazionale in A ($Y_x = X_y$, se diverse $\underline{v}$ non è conservativo e FINE).
6. Se A risponde alle proprietà, per determinare l'espressione del potenziale si fissa un punto e si calcola il lavoro lungo una qualsiasi curva aperta che congiunge il punto fissato con un punto generico P. (Conviene integrare lungo poligonali parallele agli assi).

Esercizi - Studio di Campi Conservativi

- $\underline{v}(x,y) = x\cos y\,\underline{i} + x^2 \operatorname{sen} y\,\underline{j}$

1: $A = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Valgono le ipotesi del Teorema di Poincaré
2: X e Y, componenti di $\underline{v}$, sono entrambe di classe $C^1(A)$
3: $X_y = -x\operatorname{sen} y$; $Y_x = 2x\operatorname{sen} y$

Essendo $X_y \neq Y_x$, $\operatorname{rot}\underline{v} \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{v}$ non è conservativo

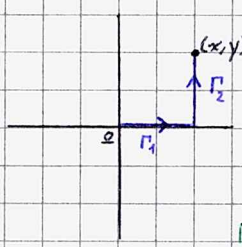
- $\underline{v}(x,y) = xy^2\,\underline{i} + yx^2\,\underline{j}$

$A = \mathbb{R}^2$, insieme convesso e dunque semplicemente connesso
$\underline{v} \in C^1(A)$

$X_y = 2xy$
$Y_x = 2xy$
$\Rightarrow \operatorname{rot}\underline{v} = 0$, per il teorema di Poincaré il campo vettoriale è conservativo in $\mathbb{R}^2$.

Possiamo dunque cercare la famiglia dei potenziali scalari, ricordando che il lavoro dipende solo dagli estremi e dal verso di percorrenza della curva su cui si effettua il calcolo basterà considerare un punto fissato e calcolare il lavoro lungo una qualsiasi curva che lo congiunge con un generico punto dell'insieme di definizione: $U(x,y) = \int_{P_0}^{P} \underline{v} \cdot \underline{t}\, ds$

Conviene, se possibile, fissare come punto iniziale l'origine; è inoltre particolarmente vantaggioso ragionare su poligonali con lati paralleli agli assi.



$$U(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \underline{v} \cdot \underline{t}\, ds \quad \text{e} \quad \Gamma_1 = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, x]$$

$$\Gamma_2 = \begin{cases} x(t) = x \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [0, y]$$

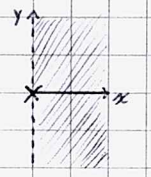
Le rappresentazioni sono entrambe concordi con l'orientamento IN QUESTO CASO.

$$\text{Dunque, } U(x,y) = \int_0^x t(0)(1)\,dt + \int_0^y t(x^2)(1)\,dt = \frac{y^2x^2}{2}$$

un potenziale scalare, in generale $U(x,y) = \frac{y^2x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$

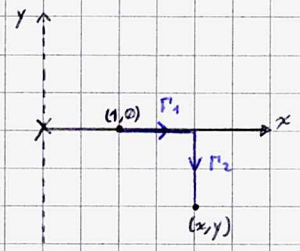
riccardo.polidoro.org

• $\underline{v}(x,y) = \frac{y}{x}\,\underline{i} + \log x\,\underline{j}$ $\quad A: x>0$ aperto



$X_y = \frac{1}{x} = Y_x \Rightarrow \underline{v}$ è irrotazionale in un insieme convesso $\Rightarrow \underline{v}$ è conservativo in A.

$X \in C^1(A)$, $Y \in C^1(A)$

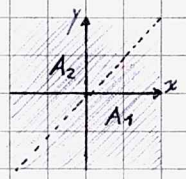


$\Gamma_1 = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [1,x]$ concorde ; $\Gamma_2 = \begin{cases} x(t) = x \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [y,0]$ discorde con l'orientamento

Dunque, $U(x,y) = \int_1^x \frac{0}{t}\,dt - \int_y^0 \log x \cdot 1\,dt = y\log x + c$ perché tutti i potenziali scalari si ottengono aggiungendo una costante c reale.

Verifica: $\frac{\partial}{\partial x}(y\log x) = \frac{y}{x}$; $\frac{\partial}{\partial y}(y\log x) = \log x \Rightarrow U'(x,y) = \underline{v}(x,y)$ □

• $\underline{v}(x,y) = -\frac{2y}{(x-y)^2}\,\underline{i} + \frac{2x}{(x-y)^2}\,\underline{j}$



A: è il piano $\mathbb{R}^2$ privato della retta $y=x \Rightarrow$ è aperto, non connesso ma è l'unione di due aperti disgiunti, semplicemente connessi (convessi).

$\underline{v} \in C^1(A)$, si verifica se $\underline{v}$ è conservativo in A_1 [A_2] e vi si calcola il corrispondente potenziale scalare per poi definire la funzione potenziale scalare complessiva.

Poiché è facile incorrere in errori nel calcolo delle derivate, conviene chiedere se il campo è irrotazionale o meno.

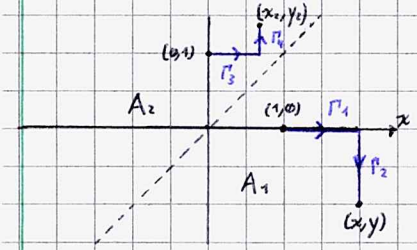
$$X_y = -\frac{2(x-y)^2 + 4y(x-y)}{(x-y)^4} = -\frac{2y+2x}{(x-y)^3}$$

$$Y_x = \frac{2(x-y)^2 - 4x(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{-2x-2y}{(x-y)^3} = -\frac{2y+2x}{(x-y)^3}$$

$\Big\} \forall (x,y) \in A \Rightarrow \mathrm{rot}\,\underline{v} = 0 \ \forall (x,y) \in A$

Dunque $\underline{v}$ è conservativo in A; un suo potenziale è la funzione $U(x,y) = \begin{cases} U_1(x,y) & \text{se } (x,y) \in A_1 \\ U_2(x,y) & \text{se } (x,y) \in A_2 \end{cases}$ dove U_1, U_2 sono potenziali di $\underline{v}$ rispettivamente in A_1 e A_2.

In A_1 scegliamo come punto iniziale $(1,0)$:



$$U_1(x,y) = -\int_1^x 0\,dt - \int_y^0 \left(\frac{2x}{(x-t)^2}\right) 1\,dt = -2x\int_y^0 \frac{1}{(x-t)^2}\,dt = -2x\left[\frac{1}{x-t}\right]_y^0 = -2x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-y}\right) =$$

$$= -2 + \frac{2x}{x-y} = \frac{2y}{x-y}$$

In A_1 fissiamo $(0,1)$:

$$U_2(x,y) = \int_0^x -\frac{2}{(t-1)^2}\,dt + \int_1^y \frac{2x}{(x-t)^2}\,dt = \left[\frac{2}{t-1}\right]_0^x + \left[\frac{2x}{x-t}\right]_1^y = \frac{2}{x-1} + 2 + \frac{2x}{x-y} - \frac{2x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{2x}{x-y} = \frac{2x}{x-y}$$

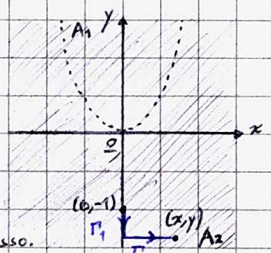
Dunque, $U(x,y) = \begin{cases} \frac{2y}{x-y} & \text{se } x > y \\ \frac{2x}{x-y} & \text{se } x < y \end{cases}$ è UN potenziale scalare di $\underline{v}$

riccardo.polidoro.org

• $\underline{v}(x,y) = \frac{2xy}{(y-x^2)^2}\,\underline{i} - \frac{x^2}{(y-x^2)^2}\,\underline{j}$ Determinare il potenziale scalare di $\underline{v}$ che in $(1,-1)$ assume valore 1

Dal testo della consegna, è evidente che $\underline{v}$ sia assunto come campo conservativo.

$A = \{(x,y) : y \neq x^2\}$



Aperto, non connesso; è l'unione di due aperti connessi, di cui A_1 è convesso. A_2 è semplicemente connesso (non presenta "buchi").

Conviene calcolare il potenziale scalare in generale, per poi trovare la costante c che verifica la richiesta come se fosse un Problema di Cauchy. Altro metodo è il calcolo del potenziale scalare con punto iniziale quello della richiesta, che determinerà $U(\bar{x},\bar{y}) = 0$, e aggiungervi il valore cercato.

$(1,-1) \in$ IV quadrante $\Rightarrow$ calcolo il potenziale scalare in A_2. Fisso come punto iniziale $(0,-1)$:

$$\Gamma_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [y,-1] \text{ discorde} \qquad ; \qquad \Gamma_2: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = y \end{cases} \quad t \in [0,x] \text{ concorde}$$

$$U_2(x,y) = -\int_y^{-1} 0\,dt + \int_0^x \frac{2yt}{(y-t^2)^2}\,dt = \left[\frac{y}{(y-t^2)^2}\right]_0^x = \frac{y}{(y-x^2)^2} - 1 \Rightarrow U_2(x,y) = \frac{y}{y-x^2} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

-1: costante che risulta dal punto iniziale $\Rightarrow$ NON UTILE

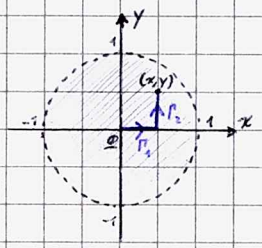
Ponendo $U(1,-1) = \frac{(-1)}{(-1)-(1)} + c = 1$; $\frac{1}{2} + c = 1 \Rightarrow c = 1/2 \Rightarrow U(x,y) = \frac{y}{y-x^2} + \frac{1}{2}$ è il potenziale scalare cercato.

• $\underline{v}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\underline{i} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\underline{j}$

• $A = \mathring{C}_{0,1}$ cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 APERTO
• $\underline{v} \in C^1(A)$
• $\mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{0}$ (il calcolo è rapido ponendo $1/\sqrt{\cdot} = (\cdot)^{-1/2}$)

Dunque $\underline{v}$ è conservativo in A.
Fissando come punto iniziale l'origine,

$$U(x,y) = \underbrace{\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}_{\text{Solo la I componente dà contributo}} + \int_0^y \frac{t}{\sqrt{1-t^2-x^2}}\,dt = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^x + \left[-\sqrt{1-t^2-x^2}\right]_0^y =$$



$$= -\sqrt{1-x^2} + 1 - \sqrt{1-x^2-y^2} + \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow U(x,y) = -\sqrt{1-x^2+y^2} + c,\ c \in \mathbb{R},\ (x,y) \in A$$

Osservazioni

• $\underline{v}$ è un campo conservativo $\Leftrightarrow$ $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ è una forma differenziale esatta

• $\underline{v}$ è un campo irrotazionale $\Leftrightarrow$ $Z_x = X_z$; $Y_z = Z_y$, $X_y = Y_x$ e la forma differenziale si dice chiusa.

Dunque, una forma differenziale esatta con coefficienti di classe C^1 in un aperto connesso è sempre chiusa; il viceversa vale solo in un aperto convesso o stellato (o semplicemente connesso, se in $\mathbb{R}^2$).

Un altro metodo per il calcolo di potenziali scalari, più semplice ma che esula dagli scopi di questo corso, è il seguente:

$X\underline{i} + Y\underline{j}$, sappiamo che $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = X(x,y)$; si osserva che integrando rispetto a x si ottiene U a meno di una costante dipendente da y; applicando dualmente il processo a Y e risolvendo il sistema si ottiene il risultato, ma non si dimostra padronanza degli argomenti!

$$U(x,y) = \underbrace{\int X(x,y)}_{\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)} + c_y = \underbrace{\int Y(x,y)}_{\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)} + c_x$$

riccardo.polidoro.org

Serie di Funzioni ①

Premesse: Serie Numeriche (A.M.1)

$(a_n)_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ successione; si costruisce una **serie** partendo dalla successione delle somme parziali (⚠: NON HA SENSO parlare di somma di infiniti numeri!)

$S_n = a_1 + \dots + a_n$; $(S_n)_n$ si dice **serie di termine generale** a_n, indicata anche con $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ oppure $a_1+\dots+a_n+\dots$

Essendo una successione, una serie può essere regolare (dunque $\exists \lim_n S_n$); il suo limite si dice **somma della serie** $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (stesso simbolo della serie stessa!).
Se il limite è finito – dunque la somma della serie è un numero reale – la serie si dice **convergente**; altrimenti diverge positivamente [negativamente].

Condizione NECESSARIA per la Convergenza: Se una serie è convergente, allora essa è generata da una successione $(a_n)_n$ **infinitesima**.

$\lim_n S_n = s \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_n S_{n+1} = s \in \mathbb{R}$ per definizione di serie convergente

$\to \lim_n (S_{n+1} - S_n) = 0 = \lim_n a_{n+1}$

La condizione ovviamente non è sufficiente: basti pensare alla **serie armonica** $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1/n$, generata da una successione infinitesima ma divergente positivamente.

Altre serie importanti nello studio di serie di funzioni

- Serie Armonica Generalizzata: $\alpha>0, \alpha\neq 1$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ < converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$; diverge positivamente $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$
  $1/n^\alpha > 1/n \Rightarrow$ la serie è maggiorata da una serie divergente positivamente (crit. del confronto)

- Serie Geometrica: $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$

⚠ Occorre rivedere i criteri di convergenza per le serie a termini di segno costante (strettamente monotone e quindi regolari)

Diverge positivamente per $x \geq 1$
Converge $\Leftrightarrow x \in]-1,1[\Leftrightarrow -1 < x < 1$ e ha per somma $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$
Non è regolare per $x \leq -1$

molto usata per le serie di potenze!

Effettuando gli opportuni cambiamenti, quanto detto per le serie numeriche si riflette (equivalentemente) nelle **serie di funzioni**:

Se $(f_n)_n$ è una successione di funzioni definite in $X \subseteq \mathbb{R}$, si dice **serie di funzioni di termine generale** f_n la successione

$(S_n)_n$, con $S_n : x \in X \to S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$.

La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ si dice **convergente** in $\bar{x} \in X$ se esiste finito $\lim_n S_n(\bar{x}) = \lim_n (f_1(\bar{x}) + \dots + f_n(\bar{x}))$, e cioè se la serie numerica $\sum_n f_n(\bar{x})$ è convergente

$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ si dice **convergente puntualmente** in $Y \subseteq X$ se $\sum_n f_n(x)$ è una serie convergente $\forall x \in Y$

riccardo.pidoro.org

Un primo esempio di serie di funzioni è la serie geometrica:

$$f_n(x) = x^{n-1} \qquad \sum_n x^{n-1} \text{ converge puntualmente in }]-1,1[\text{ e ha per funzione somma } f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Sappiamo però che la convergenza puntuale non assicura, tra le altre cose, il passaggio della proprietà di continuità al limite della successione di funzioni.

Se $(S_n)_n$ è uniformemente convergente verso la funzione f, $\overset{\text{in } Y \subseteq X}{}$ si dice che la serie di funzioni è **uniformemente convergente** verso f (e ha per somma f) in Y.
Problema è che in generale non è possibile calcolare esplicitamente la somma della serie; è una condizione importante ma di DIFFICILE VERIFICA.

Possiamo però sfruttare un altro metodo, ricordando il criterio di **assoluta convergenza** per le serie numeriche: una serie assolutamente convergente è certamente convergente.
Sappiamo che il viceversa non è vero: basti pensare alla serie armonica alternata $\sum_n (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$, che sappiamo convergere per il Criterio di Leibnitz (la successione generatrice presa in valore assoluto è decrescente e infinitesima), passando al valore assoluto invece si ottiene la serie armonica.
Le serie convergenti ma non assolutamente convergenti si dicono **semplicemente convergenti**.

Anche per le successioni e serie di funzioni si possono definire criteri sulla convergenza assoluta:

$\sum_n f_n$ si dice convergente assolutamente in $Y \subseteq X$ se $\sum_n |f_n(x)|$ è convergente $\forall x \in Y$.

Ne segue che se una serie converge assolutamente in Y, essa converge puntualmente in Y.

Diremo che la serie di funzioni $\sum_n f_n$ si dice **maggiorata** da una serie numerica convergente in $Y \subseteq X$ se $\exists (a_n)_n$, $a_n > 0$ tale che:

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in Y \quad \text{e} \quad \sum_n a_n \text{ è convergente.}$$

Si dimostra che in questo caso la serie sarà **uniformemente, assolutamente convergente in Y** (dunque anche puntualmente!)

Teorema di derivazione Termine a Termine di una serie di funzioni

Se f_n è derivabile in un intervallo I $\forall n \in \mathbb{N}$ e:
- $\sum_n f_n$ converge in I verso f PUNTUALMENTE
- $\sum_n f_n'$ converge UNIFORMEMENTE in ogni intervallo compatto contenuto in I verso φ

Allora si dimostra che f è derivabile in tutto I e $f'(x) = \varphi(x)$: la derivata della somma è la somma della serie delle derivate!

Si passa da: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$
a: $f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x) + \dots$

Risulta dunque che $f'(x) = \overbrace{\sum_n f_n'(x)}^{\varphi(x)}$

$$D\sum_n f_n = Df = \sum_n Df_n$$

Teorema di integrazione Termine a Termine di una serie di funzioni

Se $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una successione di funzioni continue in $[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e la serie $\sum_n f_n$ converge uniformemente in $[a,b]$ verso f, allora (siamo sicuri per il T. della continuità del limite che f è continua in $[a,b]$):

$$\int_a^b \sum_n f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Che risulta da un'uguaglianza analoga al caso precedente nell'ipotesi di convergenza uniforme:

$$f(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \dots + \int_a^b f_n(x)\,dx + \dots$$

⚠ Sono due TEOREMI FONDAMENTALI!

riccardo.polidoro.org

- $\sum_n \frac{\operatorname{sen} x}{n} = \operatorname{sen}x + \frac{\operatorname{sen}x}{2} + \dots + \frac{\operatorname{sen}x}{n} + \dots$ È definita in $\mathbb{R}$.

$$\operatorname{sen}x\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots\right) \Rightarrow$$

Se $\operatorname{sen}x \neq 0$, la serie diverge positivamente/negativamente
Se $\operatorname{sen}x = 0$ la serie converge: si ottiene la serie identicamente nulla.

Dunque, la serie converge in $x = k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$ verso $f(x) = 0 \ \forall x = k\pi$

- $\sum_n \frac{\operatorname{sen}x}{n^2} = \operatorname{sen}x\left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots\right)$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$.

Poiché $\left|\frac{\operatorname{sen}x}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, la serie risulta maggiorata da una serie numerica convergente e dunque converge assolutamente e uniformemente in $\mathbb{R}$.

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$ La serie converge assolutamente e uniformemente in $\mathbb{R}$ perché è maggiorata dalla serie $\sum_n 1/n^\alpha$, con $\alpha > 1$, che è convergente.

Si osserva che se ci sono funzioni limitate coinvolte con termini generali di serie convergenti, la serie sarà convergente perché maggiorata da una serie numerica convergente.

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n^3}$ $\quad |\operatorname{arctg}(nx)| \leq \frac{\pi}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

Dunque la serie è maggiorata da $\sum_n \frac{\pi}{2}(1/n^3)$, converge uniformemente e assolutamente in $\mathbb{R}$.

- $\sum_n \frac{x^n}{n}$ definita in tutto $\mathbb{R}$; maggiorarla con $\sum 1/n$ non ha senso... Come per le serie numeriche, bisogna fare un'analisi più approfondita:

- Segno: è costante $\Leftrightarrow x > 0$; studiamo la serie dei valori assoluti ricordando la condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica (ovvero che la successione generatrice sia infinitesima).

$$\sum_n \frac{|x|^n}{n} \qquad \text{studiamo} \quad \lim_n \frac{|x|^n}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } |x| > 1 \\ 0 & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{per ordine di infinito}$$

Ne segue — per la condizione necessaria — che la serie non può convergere all'esterno dell'intervallo $[-1, 1]$.

Consideriamo $x = 1 \Rightarrow \sum_n 1/n$ serie armonica, diverge positivamente

$x = -1 \Rightarrow \sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ opposto della serie armonica alternata, converge per il criterio di Leibnitz.

Se $x \in]-1, 1[\Rightarrow |x| < 1$. Applicando il criterio della radice, otteniamo che:

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x| < 1 \Rightarrow \text{la serie converge assolutamente per } x \in]-1, 1[$$
$$\text{puntualmente in } [-1, 1[$$

Considerando la serie delle derivate, otteniamo $\sum_n x^{n-1}$ che sappiamo convergere assolutamente in $]-1, 1[$.

Otteniamo però che in ogni compatto contenuto in $]-1, 1[$ converge uniformemente, poiché:

Considerando $[-a, a] \subseteq]-1, 1[$, $\quad 1 > a > 0$, $\quad |x| \leq a \Rightarrow x^{n-1} \leq a^{n-1}$ e $\sum_n a^{n-1}$ è convergente

Siamo nelle ipotesi del teorema di derivazione termine a termine $\Rightarrow$ pur non conoscendo $f(x) = \sum_n x^n/n$ sappiamo che

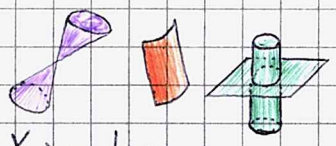
$$f'(x) = \frac{1}{1-x} \Longrightarrow f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\log(1-x) \quad \text{SOMMA DELLA SERIE } \forall x \in]-1, 1[$$

riccardo.polidoro.org

Superfici (in $\mathbb{R}^3$)

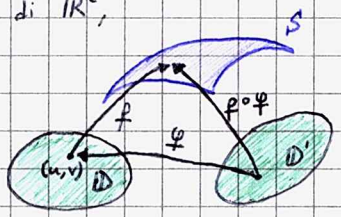
Una superficie è immaginata come un oggetto unico - connesso - e sottile - privo di punti interni.

Una superficie di $\mathbb{R}^3$ è il codominio di una funzione vettoriale continua di due variabili reali definita in una regione internamente connessa (e dunque connessa); la si denota con S.



- Per il T. di Bolzano, S è un connesso di $\mathbb{R}^3$.
- $\varphi: (u,v) \in X[\mathbb{D}] \to \varphi(u,v) \in S$ si dice una **rappresentazione parametrica** di S se X è un dominio limitato di $\mathbb{R}^2$ (insieme compatto) e φ è anche biunivoca in X; la funzione inversa è dunque certamente continua e si stabilisce un omeomorfismo tra X ed S. Se X è una regione internamente connessa, φ si dice rappresentazione di S → anche a più contorni, è certamente compatto!

Se φ è una rappresentazione parametrica di base S di un dominio di Jordan $\mathbb{D}$ e $\mathbb{D}'$ è un altro dominio di Jordan di $\mathbb{R}^2$,



Teorema di Brauwer

Se φ è un omeomorfismo di $\mathbb{D}$ su $\mathbb{D}'$ (sempre possibile tra due domini di Jordan), domini di Jordan su $\mathbb{R}^2$, allora φ trasforma i punti interni a $\mathbb{D}$ in punti interni a $\mathbb{D}'$ e di conseguenza i punti di $\partial\mathbb{D}$ nei punti di $\partial\mathbb{D}' \Rightarrow \varphi(\partial\mathbb{D}) = \partial\varphi(\mathbb{D})$

Ne segue che i punti della frontiera di $\mathbb{D}$ nel passaggio alla superficie vengono sempre trasformati nello stesso sottoinsieme di S, giocando il ruolo che avevano gli estremi dell'intervallo $[a,b]$ nelle curve.

I punti della frontiera del dominio di base appartengono a $\varphi(\partial\mathbb{D})$, detto **bordo** di S; S si dice **superficie semplice con bordo**.

Se $\mathbb{D}$ è un dominio di Jordan e φ è anche biunivoca in $\mathbb{D}$, ovvero φ è un omeomorfismo di $\mathbb{D}$ su S, S è una **superficie semplice con bordo**.

$$\underbrace{B(S)}_{\text{bordo}} = \varphi(\partial\mathbb{D}) \qquad \text{con } \varphi \text{ rappresentazione parametrica di } S.$$

- Esempio semplice di una superficie è il diagramma di una funzione continua in una regione internamente connessa.

Se f è una funzione continua in X, regione internamente connessa (in particolare, vale anche nel calcolo in domini di Jordan), allora G_f (diagramma di f) è una superficie.
A differenza delle curve (G_f risp. asse x/y), si hanno tre possibilità: G_f rispetto al piano xy/yz/zx.

- $G_f = \{(x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in X\}$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} ;\ (u,v) \in X$$

- $G_f = \{(f(y,z),y,z),\ (y,z) \in X\}$

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = u \\ z = v \end{cases} \quad (u,v) \in X$$

⚠ - $G_f = \{(x, f(z,x), z),\ (z,x) \in X\}$

$$\begin{cases} x = v \\ y = f(u,v), \\ z = u \end{cases} \quad (u,v) \in X$$

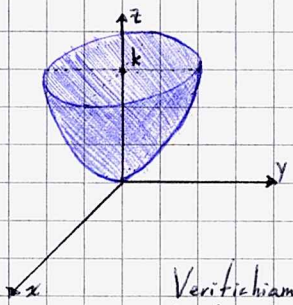
riccardo.polidoro.org

Esempio

- $z = x^2 + y^2$ paraboloide

$$f: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$ se consideriamo l'intero paraboloide

Poiché lavoriamo con integrali e altri concetti che richiedono, come per le curve, elementi limitati in compatti, raramente considereremo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.



Ci limitiamo tra il piano $z = 0$ e il piano di equazione $z = k$, con $k > 0$. Occorre comprendere dove limitare la coppia (u,v):

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (u,v) \in \underbrace{\mathbb{C}_{0,\sqrt{k}}}_{\text{cerchio chiuso}}$$

Intersezione: $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = k \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = k$

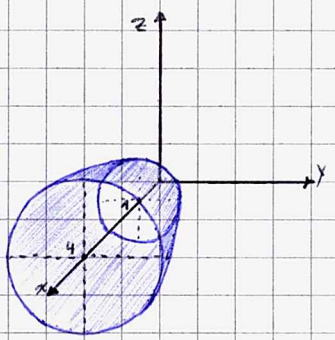
Verifichiamo che la circonferenza di centro $(0,0,k)$ e raggio $\sqrt{k}$ coincida effettivamente col bordo del paraboloide (come facilmente intuibile geometricamente):

$$B(S) \overset{\text{def}}{=} f(\partial \mathbb{D}) \qquad \text{Sappiamo che } \partial \mathbb{D}: \begin{cases} x = \sqrt{k}\cos t \\ y = \sqrt{k}\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$f(u,v) = f(\sqrt{k}\cos t, \sqrt{k}\sin t) = \underbrace{\left(\sqrt{k}\cos t, \sqrt{k}\sin t, k(\cos^2 t + \sin^2 t)\right)}_{\text{è la rappresentazione parametrica della circonferenza appartenente al piano } z=k \text{ e di raggio } \sqrt{k}}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{QED}$$

(*Il ragionamento è analogo rispetto a yz/zx*)

- Paraboloide troncato:



$$\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u \\ z = v \end{cases} \quad (u,v) \in \mathbb{C}_{1,2}$$

$\mathbb{C}_{1,2}$ corona circolare del piano yz delimitata dalle circonferenze di centro O e raggi 1 e 2.

⚠ Bisogna analizzare dove varia la COPPIA (u,v), MAI le singole componenti!

In alcuni casi le superfici non sono semplici da disegnare; esempio è la porzione di superficie di equazione $z = 1 + x^2 y^2$ che si proietta ortogonalmente nel quadrato unitario $[0,1] \times [0,1]$; ci interessa unicamente limitare (u,v) in maniera efficace:

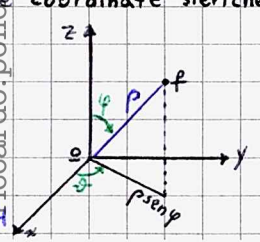
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 + u^2 v^2 \end{cases} \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

Una superficie compatta e priva di bordo si dice **superficie chiusa** (es. la superficie sferica).
Alcune di queste possono essere immaginate come l'unione di superfici semplici con bordo **adiacenti** (ovvero che si intersecano solo nei punti di una curva semplice, coincidente con una parte del bordo di entrambe: la loro intersezione è una curva semplice contenuta nel bordo di entrambe se sono due curve è sufficiente che abbiano lo stesso bordo.

Se S_1 ed S_2 sono due ~~curve~~ superfici semplici con bordo adiacenti, $S_1 \cup S_2$ →
- superficie con bordo (se la curva in cui si intersecano è $\subset B$)
- superficie chiusa (se $\Gamma \equiv B$)

Per poter effettuare una parametrizzazione efficace bisogna poter prescindere da questa distinzione; si può procedere considerando le **coordinate sferiche nello spazio**:

Consideriamo come asse polare l'asse z:



$$\begin{cases} z = \rho\cos\varphi \\ x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \end{cases}$$

riccardo.polidori.org

Possiamo dunque parametrizzare la superficie sferica di centro O e raggio r:

$$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\varphi\cos\vartheta \\ y = r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\vartheta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} \varphi \in [0,\pi] \\ \vartheta \in [-0,2\pi] \end{matrix} \quad \text{per convenzione} \Rightarrow (\varphi,\vartheta) \in [0,\pi]\times[0,2\pi]$$

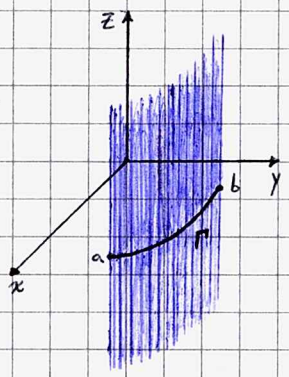
Le funzioni sono ovviamente continue $\Rightarrow$ la superficie è compatta, priva di bordo e dunque chiusa. NON si può parlare di rappresentazione parametrica se non in senso esteso/generalizzato: non vi è biunivocità tranne se "apriamo" i due intervalli; e pur aprendo l'inversa non sarebbe continua.

Se si ha solo una porzione (es. superficie semisferica), si potrebbe essere tentati dalla rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{r^2 - (u^2+v^2)} \end{cases} \quad \text{con } (u,v) \in \mathbb{C}_{0,r}$$

Il problema è che la funzione radice è potenzialmente NON DERIVABILE in ogni punto dell'insieme che si sta considerando (può essere utile per una striscia, ad esempio).

Nel caso delle superfici cilindriche:



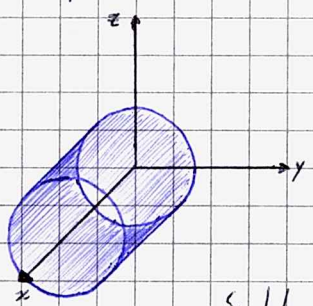
Γ curva semplice del piano xy,

Superficie cilindrica di curva direttrice Γ e rette generatrici parallele all'asse z: è l'insieme dei punti appartenenti a rette parallele all'asse z e passanti per Γ.

Supponiamo che Γ: ~~$\gamma(u) =$~~ $\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \end{cases}$, $u \in [a,b]$, dunque la rappresentazione della superficie cilindrica è:

$$\underline{f}(u,v) = (x(u), y(u), 0) + v\,\underline{k} \iff \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = v \end{cases} \quad (u,v) \in [a,b]\times X \subseteq \mathbb{R}$$

Il procedimento è analogo per curve appartenenti ~~agli assi~~ ai piani coordinati:



$$\Gamma: \begin{cases} y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases}, \; u \in [a,b] \quad ; \quad \underline{f}(u,v) = (0, y(u), z(u)) + v\,\underline{i} \iff \begin{cases} x = v \\ y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases} ; \; (u,v) \in [a,b]\times\mathbb{R}$$

Serie di funzioni ②: potenze

Si definisce **serie di potenze di punto iniziale** $x_0 \in \mathbb{R}$ e coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots$, dove $(a_{n-1})_n$ è una successione numerica, la serie di funzioni:

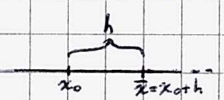
$$a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots$$

cioè la serie generata dalla successione di funzioni $(a_{n-1}(x-x_0)^{n-1})_n$

La serie converge certamente in $x = x_0$ verso a_0.

Ponendo $x_0 = 0$ e i coefficienti $a_i = 1\ \forall i$, si ottiene la **serie geometrica**, che può essere dunque considerata come una particolare serie di potenze.

Lemma Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$ converge in $\bar{x} \neq x_0$, allora sicuramente converge assolutamente nell'intervallo $]x_0-h, x_0+h[$, con $h = |\bar{x} - x_0|$ e converge uniformemente in ogni intervallo compatto contenuto nell'intervallo suddetto.



Se troviamo un $\bar{x}_1$ in cui la serie converge, con $|\bar{x}_1| > |\bar{x}|$, si può allargare l'intervallo in cui c'è convergenza assoluta fino ad un eventuale valore limite (come per la serie geometrica!)

Ricordiamo che:

$\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{n-1}$: (serie geometrica)

- converge assolutamente per $x \in]-1,1[$
- non converge all'esterno di $]-1,1[$
- converge uniformemente $\forall [a,b] \subseteq]-1,1[$

riccardo.polidoro.org

Definiamo raggio di convergenza della serie di potenze $\rho = \sup\{|\bar{x}-x_0|, \bar{x}\in X\}$ dove X è l'insieme dei punti in cui la serie converge.

Ne segue che $+\infty \geq \rho \geq 0 \Rightarrow$ se $\cdot\ \rho = 0$, $\sum_n a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$ converge solo in x_0

$\cdot\ \rho = +\infty \Leftrightarrow \sum_n a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$ converge $\forall$ assolutamente in $\mathbb{R}$ e uniformemente in ogni intervallo $[a,b]$

$\cdot\ 0 < \rho < +\infty \Leftrightarrow \sum_n a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$ converge assolutamente in $]x_0-\rho, x_0+\rho[$, uniformemente in ogni $[a,b] \subseteq]x_0-\rho, x_0+\rho[$ e NON CONVERGE IN $]-\infty, x_0-\rho[\cup]x_0+\rho, +\infty[$.

Esempi

- $\sum_n \frac{x^n}{n}$ converge assolutamente in $]-1,1[$; puntualmente in $[-1,1[$. Ne segue che $\rho = 1$ e la serie converge in un estremo dell'intervallo di convergenza
- $\sum \frac{x^n}{n^2}$ $\rho = 1$ converge assolutamente e uniformemente in $[-1,1]$ perché ~~è~~ se $|x| \leq 1$ la serie è maggiorata da $\sum_n 1/n^2$

Teorema di Cauchy-Hadamard

criterio della radice per serie di potenze

Se $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell$, con a_n successione dei coefficienti della serie, allora $\rho = 1/\ell$; con la convenzione che se $\ell = 0$, $\rho = +\infty$; $\ell = +\infty$, $\rho = 0$

Dimostrazione

Poiché $\sqrt[n]{|a_n||x-x_0|} = \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\text{tende ad } \ell \text{ per Hp}} \cdot |x-x_0|$ si ha che $\lim_n \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} = \ell|x-x_0|$

- $\ell = 0 \Rightarrow$ la serie converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho = +\infty$
- $\ell = +\infty \Rightarrow$ la serie converge (ass.) solo per $x = x_0 \Rightarrow \rho = 0$
- $0 < \ell < +\infty \Rightarrow$ la serie converge (solo) $\Leftrightarrow |x-x_0| < 1/\ell \Rightarrow \rho = 1/\ell$.

È un teorema utile per il calcolo di raggi di convergenza: non occorre studiare la serie al variare di x.

Teorema di d'Alembert

criterio del rapporto per serie di potenze

Se esiste $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$, allora $\rho = 1/\ell$ ...

La dimostrazione è analoga, applicando il criterio del rapporto invece che il criterio della radice alla serie dei valori assoluti.

Esempio

- $\sum_n n!(x-2)^n$ conviene usare il T. di d'Alembert (radice del fattoriale =?)

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_n (n+1) = +\infty \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \text{la serie converge solo per } x = 2$$

Se $x \neq 2$, $n!(x-2)^n = \frac{n!}{\frac{1}{(x-2)^n}}$ che, per $n \to +\infty$, tende a $+\infty$: se $|x| < 2$ è per ordine di infinito

- Le serie di potenze sono generate da successioni di polinomi, ovvero funzioni continue; siamo certi che la somma di una serie di potenze è una funzione continua nell'interno dell'intervallo di convergenza (applicazione del teorema di continuità della somma); Pertanto se $\rho > 0$ la somma della serie $\sum_n a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} = f$ è una funzione continua in $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ se $\rho < +\infty$, in $\mathbb{R}$ se $\rho = +\infty$.

- Per il T. d'integrazione termine a termine (con $\rho > 0$), applicabile ad ogni intervallo $[a,b] \subseteq I_\rho$ intervallo di convergenza,

$$f = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_n \int_a^b a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}\,dx = a_0(b-a) + a_1\frac{(x-x_0)^2}{2} + \dots$$

mriccardo.polidoro.org

$a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$

$\downarrow D$

$a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \dots$

Si osserva che la serie derivata è anch'essa una serie di potenze di punto iniziale x_0; si dimostra facilmente che la serie, avente per coefficienti $(n\,a_n)_n$, ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza: applicando il T. di Cauchy-Hadamard abbiamo che:

$$\lim_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \ell \left(= \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} \right) \text{ in quanto } \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

Dunque ogni serie di potenze con $\rho > 0$ si può derivare termine a termine nell'interno del suo I_ρ, ovvero risulta che la somma f è derivabile in detti punti e $f'(x) = \sum_n n a_n (x-x_0)^{n-1}$

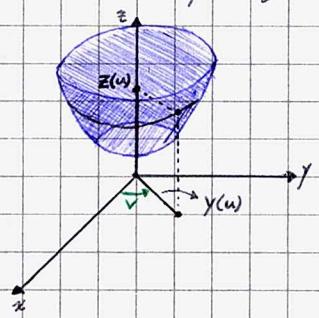
Superfici di Rotazione

Sia Γ una curva semplice del piano (ad esempio yz), aperta e dotata di estremi o chiusa, e sia ρ una sua rappresentazione parametrica di base $[a,b]$. L'insieme dei punti appartenenti a circonferenze con centro sull'asse z, passanti per i punti di Γ e contenute in piani ortogonali all'asse z si dice superficie di rotazione.

$$\rho: \begin{cases} y = y(u) \\ z = z(u) \\ (x = 0) \end{cases}, \quad u \in [a,b]$$

Nella rotazione, la quota di un punto della superficie è la stessa quota del punto di Γ appartenente alla stessa circonferenza: $z(u)$ rimane dunque inalterata nella rotazione.

Per determinare l'espressione di x e y in funzione dei parametri, consideriamo il generico punto della superficie di rotazione: considerando la sua proiezione sul piano xy risulta evidente che una volta nota la distanza di detta proiezione dall'origine saranno note $x(u)$ e $y(u)$ moltiplicando per sen/cos e sfruttando dunque le coordinate polari nel piano xy: le circonferenze avranno per raggio $y(u)$ [$x(u)$ se $\Gamma \in zx$]. Ne segue che:



$$S: \begin{cases} x = y(u)\cos v \\ y = y(u)\,\text{sen}\, v \\ z = z(u) \end{cases} \quad (u,v) \in [a,b] \times [0, 2\pi] \quad \left(\begin{array}{l} \text{con } x(u) \text{ al posto di} \\ y(u) \text{ se } \Gamma \in xz \end{array} \right)$$

Considerando invece una rotazione intorno all'asse y:

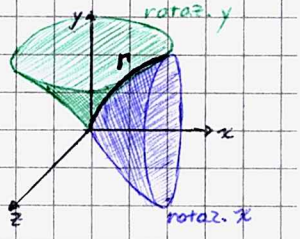
$$S: \begin{cases} x = z(u)\,\text{sen}\, v \\ y = y(u) \\ z = z(u)\cos v \end{cases} \quad (u,v) \in [a,b] \times [0, 2\pi]$$

Per una rotazione intorno all'asse x, si considera $\Gamma \in zx$ e

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = z(u)\cos v \\ z = z(u)\,\text{sen}\, v \end{cases} \quad (u,v) \in [a,b] \times [0, 2\pi]$$

Se consideriamo una curva Γ generica del piano xy di equazione $\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \end{cases}$, per la rappresentazione grafica conviene ruotare la terna di assi cartesiani (logicamente preservandone l'orientamento).

Volendola far ruotare intorno all'asse x, $S: \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u)\cos v \\ z = y(u)\,\text{sen}\, v \end{cases} \quad (u,v) \in [a,b] \times [0, 2\pi]$



Analogamente ruotando rispetto all'asse y, $S: \begin{cases} x = x(u)\,\text{sen}\, v \\ y = y(u) \\ z = z(u)\cos v \end{cases}, \quad (u,v) \in [a,b] \times [0, 2\pi]$

⚠ Si osserva che nella rotazione c'è sempre una coordinata che "non varia" $\Rightarrow$ è la prima da scrivere nel sistema! (evita confusione)

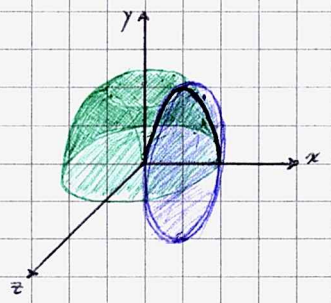
È elementare il caso della rotazione intorno all'asse z di $\Gamma \in zx$.

riccardo.polidoro.org

Esempi

- Sia Γ l'arco di sinusoide d'equazione $y=\operatorname{sen} x$, $x \in [0,\pi]$. Se Γ ruota intorno all'asse x, poiché $\Gamma: \begin{cases} x=u \\ y=\operatorname{sen} u \end{cases} \quad u \in [0,\pi]$,

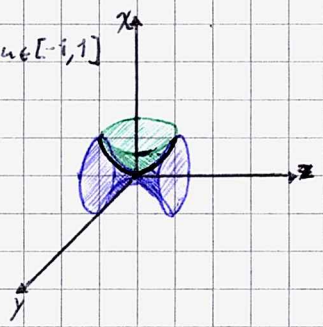
  - S avrà equazioni $\begin{cases} x=u \\ y=\operatorname{sen} u \cos v \\ z=\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \end{cases}$, $(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$



Effettuando una rotazione intorno all'asse y invece assume una forma totalmente diversa e DOTATA DI BORDO:

- $S: \begin{cases} x=u \operatorname{sen} v \\ y=\operatorname{sen} u \\ z=\underbrace{u}_{x(u)} \cos v \end{cases}$, $(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$

- Sia Γ l'arco di parabola di equazione $x=z^2$, $z \in [-1,1] \Rightarrow \Gamma: \begin{cases} x=u^2 \\ z=u \end{cases} \quad u \in [-1,1]$



  - Se Γ ruota intorno all'asse z,

$$S: \begin{cases} x=u^2 \cos v \\ y=u^2 \operatorname{sen} v \\ z=u \end{cases} \quad (u,v) \in [-1,1] \times [0,2\pi]$$

NON SEMPLICE

  - Intorno all'asse x,

$$\begin{cases} x=u^2 \\ y=u \cos v \\ z=u \operatorname{sen} v \end{cases} \quad (u,v) \in [-1,1] \times [0,2\pi]$$

ed essendo $y^2+z^2=u^2$ avremo $x=y^2+z^2$, con $(y,z) \in C_{0,1}$

Superfici Regolari

Sia S una superficie con bordo e sia $\underline{\rho}$ una sua rappresentazione parametrica di base un dominio $\mathbb{D}$ di $\mathbb{R}^2$ limitato e connesso.
Una rappresentazione parametrica $\underline{\rho}$ di S si dice **regolare** se:

- $\underline{\rho} \in C^1(\mathbb{D})$
- il prodotto vettoriale $\underline{\rho}_u(u,v) \times \underline{\rho}_v(u,v) \neq \underline{0} \quad \forall (u,v) \in \mathbb{D}$; si ha cioè che $\|\underline{\rho}_u \times \underline{\rho}_v\| > 0$ in tutto $\mathbb{D}$.

Ricordiamo che: (vettori derivata)
$\underline{\rho}_u = (x_u, y_u, z_u)$
$\underline{\rho}_v = (x_v, y_v, z_v)$

Per calcolare l'area di una superficie si può pensare di approssimarla con superfici poliedriche inscritte ma Peano dimostrò che con un simile procedimento risulterebbe che una superficie cilindrica abbia area infinita.
Analogamente, per orientare le superfici è necessario definire il concetto di regolarità.

Una superficie S si dice regolare se:

- Esiste una sua rappresentazione parametrica di base $\mathbb{D}$ (con $\mathbb{D}$ DOMINIO REGOLARE di $\mathbb{R}^2$ e $\partial\mathbb{D}$ PRIVA DI PUNTI CUSPIDALI !)

La seconda condizione sulla rappresentazione regolare si può esprimere in altre forme equivalenti:

Infatti $\underline{\rho}_u \times \underline{\rho}_v = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \underline{k}$ è dire che $\underline{\rho}_u \times \underline{\rho}_v \neq \underline{0}$ equivale a dire che almeno una delle componenti di $\underline{\rho}_u \times \underline{\rho}_v$ sia non nulla.

Considerando però la matrice jacobiana di $\underline{\rho}$ $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$, notiamo che i minori J_i ottenuti cancellando la i-ma riga (cambiando di segno per i=2) coincidono con i minori suddetti, componenti del prodotto vettoriale. Dunque, $\underline{\rho}_u \times \underline{\rho}_v \neq \underline{0}$ equivale a richiedere che almeno un minore di ordine 2 della matrice Jacobiana è non nullo $\Rightarrow r(J)=2$ **in ogni punto di $\mathbb{D}$.**

$$J_1 = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}; \quad J_2 = -\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}; \quad J_3 = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

Analiticamente, $\|\underline{\rho}_u \times \underline{\rho}_v\| > 0$ in $\mathbb{D} \Leftrightarrow \sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2} > 0$ in $\mathbb{D}$

riccardo.poloni.org

Tra le figure regolari figura certamente il diagramma di una funzione di classe C^1 su un dominio di Jordan regolare $\mathbb{D}$:
$f \in C^1(\mathbb{D})$, $\mathbb{D}$ dominio di Jordan regolare di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow G_f$ è una superficie regolare.

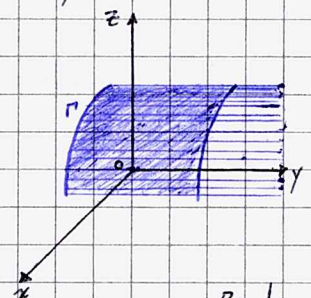
- $z = f(x,y)$, $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$, $(u,v) \in \mathbb{D}$ $\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} J_1 = -f_u \\ J_2 = -f_v \\ J_3 = 1 \end{matrix}$ concorde all'asse z...

derivate parziali!

- $x = f(y,z)$ $\quad \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = u \\ z = v \end{cases}$ $(u,v) \in \mathbb{D}$ $\quad J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} J_1 = 1 \\ J_2 = -f_u \\ J_3 = -f_v \end{matrix}$

- $y = f(z,x)$ $\quad \begin{cases} x = v \\ y = f(u,v) \\ z = u \end{cases}$ $(u,v) \in \mathbb{D}$ $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_u & f_v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} J_1 = -f_v \\ J_2 = 1 \\ J_3 = -f_u \end{matrix}$ cambia di segno!

Anche alcune superfici cilindriche possono essere regolari: se Γ è una curva compatta regolare di un piano coordinato, la superficie cilindrica di curva direttrice Γ e rette generatrici parallele all'asse ortogonale al piano di Γ è una superficie regolare.



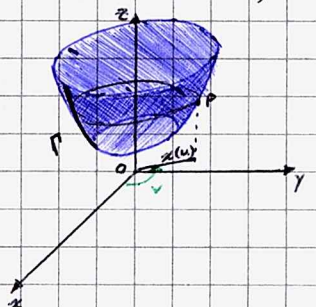
Supponiamo che $S = \begin{cases} x = x(u) \\ y = v \\ z = z(u) \end{cases}$ $(u,v) \in [a,b] \times [c,d]$,

con $\underset{(\Gamma)}{\varphi}(x,z) \in C^1([a,b])$ e $\sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2} > 0 \ \forall u \in [a,b]$ $(\|\varphi'\| > 0)$

Risulta dunque che $J = \begin{pmatrix} x'(u) & 0 \\ 0 & 1 \\ z'(u) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} J_1 = -z'(u) \\ J_2 = 0 \\ J_3 = x'(u) \end{matrix}$ E risulta che $\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} = \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}$, positiva per ipotesi poiché φ è regolare.

Per le curve direttrici chiuse questo ragionamento non è applicabile, ma esistono ~~curve~~ superfici regolari così definite!

Nel caso delle superfici di rotazione, quelle ottenute dalla rotazione di una curva regolare Γ intorno a un asse sono regolari SE la curva **non interseca l'asse di rotazione** in nessun punto.



$\Gamma \begin{cases} x = x(u) \\ z = z(u) \end{cases}$ $u \in [a,b]$ φ regolare $\Rightarrow S = \begin{cases} x = x(u)\cos v \\ y = x(u)\operatorname{sen} v \\ z = z(u) \end{cases}$; $(u,v) \in [a,b] \times [0, 2\pi]$

$J = \begin{pmatrix} x'(u)\cos v & -x(u)\operatorname{sen} v \\ x'(u)\operatorname{sen} v & x(u)\cos v \\ z'(u) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} J_1 = -x(u)\, z'(u)\cos v \\ J_2 = -x(u)\, z'(u)\operatorname{sen} v \\ J_3 = x(u)\, x'(u) \end{matrix}$ cambia segno

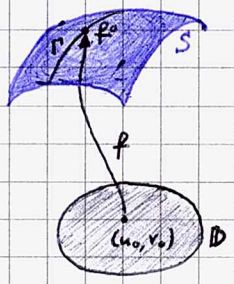
E si osserva che $\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} = \sqrt{x(u)^2 z'(u)^2 + x(u)^2 x'(u)^2} = \sqrt{x(u)^2 \left(z'(u)^2 + x'(u)^2\right)} =$ e il fatto che Γ non interseca l'asse z assicura che $x(u) \neq 0$

$= |x(u)| \cdot \|\varphi'(u)\| > 0 \ \forall (u,v) \in [a,b] \times [0, 2\pi]$

$|x(u)| > 0$ per l'ipotesi appena esplicitata; $\|\varphi'(u)\| > 0$ perché φ è regolare

riccardo.polidoro.org

Sappiamo che se $\underline{f}(u,v)$ è regolare, $\underline{f}_u \times \underline{f}_v \neq \underline{0}$ in tutti i punti, dunque i due vettori derivati sono linearmente indipendenti e quindi individuano un piano; consideriamo un punto $\underline{f}_0$ della superficie ed una curva regolare passante per $\underline{f}_0$.



Essendo Γ regolare, essa è dotata di retta tangente in ogni punto (e in particolare in $\underline{f}_0$); esistono però infinite curve regolari passanti per $\underline{f}_0$; si dimostra che dette curve sono tutte e sole le immagini di curve regolari contenute nel dominio di base passanti per (u_0, v_0) trasformate tramite la rappresentazione parametrica $\underline{f}$; tutte le curve suddette sono dotate di rette tangenti perché sono regolari e si dimostra dunque che $\underline{f}_u$ e $\underline{f}_v$ individuano un piano che contiene le rette tangenti a tutte le curve regolari tracciate sulla superficie passanti per il punto $\underline{f}_0$.

Detto piano si dice dunque **piano tangente** ad S nel punto $\underline{f}_0$.
Una superficie regolare è dunque una superficie che ammette piano tangente in ogni suo punto.
Se, come nelle nostre ipotesi, la frontiera è priva di punti cuspidali, i punti nel bordo non determinano problemi: vale un teorema di prolungamento per cui una funzione di classe C^1 in un dominio regolare avente frontiera priva di punti cuspidali (può essere non regolare e avere punti angolosi!), la funzione si può prolungare su tutto il piano in una funzione di classe C^1, dunque essendo prolungabile i punti del bordo della superficie possono essere considerati come punti interni. Altrimenti si considerano solo i punti diversi dal bordo.

L'equazione vettoriale del piano tangente è di elementare deduzione: $\underline{f} = \underline{f}_0 + \lambda \underline{f}_u(u_0, v_0) + \mu \underline{f}_v(u_0, v_0)$

L'equazione cartesiana si può ottenere ricordando quanto visto in Geometria e Algebra Lineare: per conoscere detta equazione è sufficiente determinare una terna di parametri di giacitura del piano, che rappresenta geometricamente le componenti di un vettore ortogonale al piano (in questo caso $\underline{f}_u \times \underline{f}_v$!)
Le componenti di $\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v$ sono i **minori della matrice Jacobiana** $J_{\underline{f}}$

L'equazione cartesiana del piano è: $\underbrace{J_1(u_0,v_0)}_{a} \cdot (x - x(u_0,v_0)) + \underbrace{J_2(u_0,v_0)}_{b} \cdot (y - y(u_0,v_0)) + \underbrace{J_3(u_0,v_0)}_{c} \cdot (z - z(u_0,v_0)) = 0$

Il concetto di piano tangente è già emerso durante la discussione sulla differenziabilità di funzioni scalari in due variabili:

Se f è una funzione differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$ aperto, esiste il piano tangente a G_f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ che ha equazione $z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)$; questa condizione coincide infatti con quanto deducibile dall'equazione esplicitata in questa pagina: f è per ipotesi (sulle superfici) di classe C^1 e dunque differenziabile, e $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix} \Rightarrow J_1 = -f_x$, $J_2 = -f_y$, $J_3 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{-f_x(x_0,y_0)}_{J_1} \cdot (x - x_0) + \underbrace{(-f_y(x_0,y_0))}_{J_2} \cdot (y - y_0) \underbrace{-f(x_0,y_0)}_{J_3} = 0$$ esplicitando z si ottiene tutto

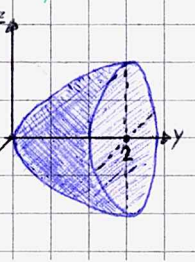
Se esiste il piano tangente ad ogni punto di una superficie regolare, si può definire la retta ad esso ortogonale passante per il medesimo punto, detta **retta normale ad S** in $\underline{f}_0 = \underline{f}(u_0, v_0)$; è logicamente dotata di due versori, individuati da $\pm \frac{\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v}{\|\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v\|}$ (calcolati in $\underline{f}_0(u_0, v_0)$!).

Si ottiene che se S è regolare, si descrivono due campi vettoriali continui tramite i versori normali: il campo vettoriale

$\underline{n} : \underline{f} \in S \longrightarrow \underline{n}_{\underline{f}}$ versore normale a S e il suo opposto sono campi vettoriali continui su S (non si altera bruscamente il verso!)

Scegliere un versore normale in un punto implica di averli scelti su tutta la superficie, dunque scegliere uno di questi due campi vettoriali ci permette di **orientare** la superficie e si dimostra che tutte le rappresentazioni parametriche regolari di S si dividono in due classi a seconda del segno del versore normale (sono due classi DISGIUNTE).
Una rappresentazione parametrica si dice concorde con l'orientamento fissato se il versore normale costruito da $\underline{f}$ coincide con quello fissato sulla superficie, altrimenti è discorde. $\frac{\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v}{\|\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v\|}$

Esempio



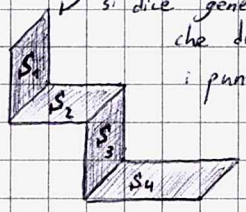
Orientiamo S in modo che n_2 sia < 0 in S $(\underline{n} = (n_1, n_2, n_3))$

$\underline{f} \begin{cases} x = v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u \end{cases}$, $(u,v) \in C_{0,\sqrt{2}}$ ma $J_1 = -2v$, $J_2 = 1$, $J_3 = -2u$ $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2u & 2v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow n_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}} > 0 \Rightarrow \underline{f} \text{ è discorde con l'orientamento fissato}$$

riccardo.polidoro.org

In questi discorsi non rientrano le superfici cilindriche/di rotazione ottenute da curve chiuse né la superficie sferica, ma ricordiamo che unendo due superfici elementari si ottiene una superficie chiusa o aperta a seconda della coincidenza dei bordi.



S si dice generalmente regolare se è l'unione di un numero finito di superfici regolari ~~che hanno in comune~~ $S_1, \dots, S_n$ in modo che due superfici sono adiacenti o concatenate attraverso superfici adiacenti e abbiano in comune al più i punti dei bordi.

Per le superfici adiacenti aventi bordi coincidenti si dimostra che in tutti i punti in cui esiste il piano tangente (e dunque la retta normale) esiste una semiretta normale che non interseca il dominio di $\mathbb{R}^3$ racchiuso dal bordo se non nel bordo stesso; essa è detta **normale esterna** alla superficie; la altra semiretta si dice normale interna. S può dunque essere orientata verso l'esterno o verso l'interno del dominio racchiuso.

Dunque una superficie chiusa generalmente regolare si orienta scegliendo il versore normale esterno $\underline{n_e}$ [interno $\underline{n_i}$] nei punti in cui esiste il piano tangente.
Definito T il dominio che ha S come frontiera, si può dimostrare un teorema analogo al teorema di Jordan per le curve chiuse: ogni superficie chiusa è la frontiera di un dominio connesso limitato, detto dominio di Jordan dello spazio.

Serie di Funzioni ③

Abbiamo visto che se una serie di potenze di punto iniziale x_0 e coefficienti a_n ha $\rho > 0$, allora la serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza; ciò ci consente di dire che:

Se $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots$, allora la serie è derivabile in $\mathring{I}_\rho$ e

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots + n a_n (x-x_0)^{n-1} + \dots \qquad \forall x \in \mathring{I}_\rho$$

e si può iterare il procedimento derivando ulteriormente:

$$f''(x) = 2a_2 + (n+1)n\, a_{n+1}(x-x_0)^{n-1} + \dots$$
$$\dots$$

e $f \in C^\infty(\mathring{I}_\rho) \Rightarrow$ la somma di una serie di potenze con $\rho > 0$ è una funzione di classe C^∞.

E $f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$, mentre $f(x_0) = a_0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ~~a_n~~ $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$; $a_0 = f(x_0)$

Dunque se una serie di potenze ammette somma, i suoi coefficienti sono necessariamente i valori della somma e delle sue derivate calcolati nel punto x_0 e divise per il rispettivo indice fattoriale $\Rightarrow$ una serie di potenze con una certa somma è **univocamente determinata** in virtù dell'espressione dei suoi coefficienti.

Consideriamo ora una funzione di classe C^∞ in un intervallo I di $\mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathring{I}$ per definire la **Serie di Taylor di punto iniziale x_0**:

Se $f \in C^\infty(I)$ e $x_0 \in \mathring{I}$, la serie di Taylor di f di punto iniziale x_0 è: con $f^0(x_0) = f(x_0)$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \dots$$

E la somma n-ma della serie coincide con il **Polinomio di Taylor**:

$S_n = P_{n-1}$ polinomio di Taylor di ordine $n-1$ della funzione f e di punto iniziale x_0.

Ricordando che $f(x) = P_{n-1}(x) + \underbrace{o((x-x_0)^{n-1})}_{r_{n-1}(x)}$,

La serie ha per somma f, che si dice **sviluppabile in serie di Taylor**, se $\forall x \in I$ $f(x) = \sum_n \dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$; ciò equivale a richiedere che: ⊛

⊛ $\lim_n r_n(x) = 0 \quad \forall x \in I$

riccardo.poliboro.org

Un esempio di funzione non sviluppabile in Serie di Taylor è $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$, funzione di classe C^∞: $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{e^{-1/x^2}}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x}\cdot e^{-1/x^2}$ ha $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ e si ripete sulle derivate per la prevalenza dell'esponenziale.

$f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n)}(0)=0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ La serie di Taylor di punto iniziale 0 della funzione è la serie identicamente nulla, la cui somma NON coincide con la funzione di partenza!! $\Rightarrow$ non può convergere verso f in nessun $x\neq 0$.

Una condizione sufficiente, ottenuta dalla formula di Taylor con resto di Lagrange, è l'equilimitatezza delle derivate:

Se $\exists k>0 : |f^{(n)}(x)|\leq k \quad \forall n\in\mathbb{N}$ e $\forall x\in I$, allora si dimostra che $\forall x\in \mathring{I}$ f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0.

Questa condizione è certamente soddisfatta dalle funzioni $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$, sviluppabili in serie di Taylor di punto iniziale 0 (Serie di MacLaurin) con sviluppo:

- $\operatorname{sen}x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots \quad \forall x\in\mathbb{R}$
- $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\dots \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Utile per calcolare integrali non elementarmente calcolabili!
Esempi: $\frac{\operatorname{sen}x}{x}$; $\frac{\cos x}{x}$; e^{-x^2}; $\frac{e^x}{x}$; $\frac{1}{\log x}$

Esempio:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt = \int_0^x \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{n+1}t^{2n-2}}{(2n-1)!}\,dt \overset{\text{T. int. serie}}{=\!=} \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^x (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$$

converge molto rapidamente $\Rightarrow$ è facile approssimare la somma della serie (che è una funzione!!)

Sviluppiamo in Serie di Taylor la funzione e^x, che ha derivate sempre uguali a sé stessa non equilimitate in $\mathbb{R}$: sono limitate dal basso (tutte >0) ma non dall'alto; se ci restringiamo ad un qualsiasi intervallo limitato di $\mathbb{R}$ la funzione è sviluppabile in serie di Taylor, valendo detta proprietà in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$ essa si riflette naturalmente in tutto $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ **e^x è sviluppabile in Serie di Taylor di punto iniziale 0 e:**

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dots \quad \forall x\in\mathbb{R}$$ (ogni x appartiene certamente a un intervallo limitato)

Invece $\log(1+x)$ è definito in $]-1,+\infty[$; per svilupparlo si sfrutta la serie $1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n+1}x^{n-1}$, serie di potenze di punto iniziale 0 e con $\rho=1 \Rightarrow$ converge assolutamente in $]-1,1[$ e uniformemente $\forall [a,b]\subseteq]-1,1[$; fissato x si può conoscerne la somma: la serie è infatti la serie geometrica di primo termine 1 e ragione $-x \Rightarrow$ converge a $\frac{1}{1+x}$.
Sfruttando il teorema di integrazione termine a termine ($\rho>0 \Rightarrow$ la serie è integrabile termine a termine in ogni compatto contenuto nell'intervallo di convergenza) $\forall x\in]-1,1[$, si ottiene:

$$\log(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\dots$$

coincide con lo sviluppo in Serie di Taylor poiché la funzione è somma di un'UNICA serie di potenze, che ha coefficienti univocamente determinati!

$$\Downarrow$$

$$\log(1+x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad \forall x\in\,]-1,1]$$

nel punto 1 la serie coincide con la serie armonica alternata, convergente per Leibnitz; poiché converge in un estremo dell'intervallo di convergenza e $\rho\in\mathbb{R}$ la serie converge uniformemente in tutto l'intervallo compatto con detto estremo: converge in $]x_0-\rho, x_0+\rho] \to$ conv. unif in $[a, x_0+\rho]\ \forall a\in]x_0-\rho, x_0+\rho]$.

Ne segue che la sua somma è una funzione continua nell'intervallo ~~di convergenza~~ chiuso; $\log(1+x)$ è continua, la somma della serie armonica alternata è $\log 2$.

Il ragionamento appena fatto su $\log(1+x)$ è analogo per $\operatorname{arctg}x$, partendo da $\frac{1}{1+x^2}$, somma della serie geometrica di ragione $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^{n+1}x^{2n-2}$$

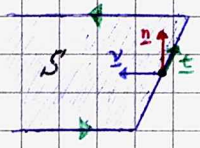
si integra termine a termine; $\rho=1$ e converge in entrambi gli estremi.
È utile per trovare approssimazioni numeriche di π.

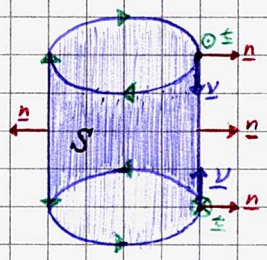
riccardo.polidoro.org

Superfici ③

Sia S una superficie semplice con bordo regolare. Allora $B(S)$ è l'unione di un numero finito di curve semplici chiuse generalmente regolari (perché il dominio di base di una rappresentazione parametrica qualsiesi ha per frontiera l'unione di un numero finito di curve chiuse generalmente regolari, che vengono trasformate attraverso un omeomorfismo nello spazio nel bordo di S, ottenendo ancora curve chiuse ~~regolari~~ generalmente regolari).

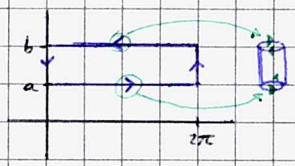
Orientiamo S; consideriamo un punto del bordo che sia di regolarità (in cui esiste la retta tangente!), consideriamo il piano tangente alla superficie nel punto considerato, in cui è contenuta una retta ortogonale alla retta tangente; detta retta normale si divide in due semirette: una interseca i punti interni alla superficie, l'altra è esterna; consideriamo il versore $\underline{n_i}$, l'orientamento positivo del bordo è quello per cui la terna $(\underline{t}, \underline{\nu}, \underline{n})$ è congruente con la terna $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \Rightarrow B(S)$ si dice **orientato positivamente** o coerentemente con S.





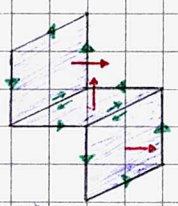
Altro metodo - più complesso - per determinare l'orientamento del bordo è considerare la superficie orientata e una sua rappresentazione concorde con l'orientamento fissato e di base un dominio $\mathbb{D}$; l'orientamento positivo di $\partial\mathbb{D}$ viene trasportato dalla rappresentazione parametrica sull'orientamento concorde del bordo.
La verifica è però molto complessa e lunga di calcoli!

Es: $\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\,\text{sen}\,u \\ z = v \end{cases}$, $(u,v) \in [0, 2\pi] \times [a,b]$



Orientato positivamente il bordo, vediamo ora come orientare le superfici generalmente regolari: l'orientamento di una superficie generalmente regolare è quello per cui su due superfici adiacenti le porzioni di bordo in comune vengono percorse in maniera opposta:

Dunque una superficie generalmente regolare si può ottenere orientando coerentemente le **porzioni di regolarità**



Se una superficie è chiusa, la si può orientare verso l'esterno o verso l'interno (rispetto al dominio limitato dello spazio avente S come frontiera.
~~Ogni superficie~~

Teorema: Ogni superficie regolare è localmente il diagramma di una funzione di classe C^1.

Abbiamo ora necessità di definire l'area di una superficie, la definizione di integrale superficiale e di flusso (campi vettoriali dello spazio).

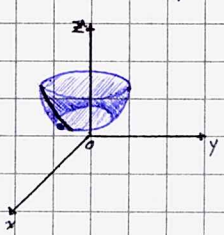
Area di una superficie dello spazio regolare:

Ricordando il calcolo della lunghezza delle curve piane, se S è una superficie regolare e ρ è una sua rappresentazione parametrica regolare di base il dominio $\mathbb{D}$ regolare di $\mathbb{R}^2$, allora in ogni punto della superficie $\rho_u \wedge \rho_v \neq \underline{0}$ e ρ è di classe C^1; ne segue che ρ_u e ρ_v individuano un parallelogramma avente area pari a $\|\rho_u \wedge \rho_v\| = \|\rho_u\| \cdot \|\rho_v\| \cdot \text{sen}\,\widehat{\rho_u \rho_v}$.

Ne segue che $\text{area}(S) \overset{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{D}} \|\rho_u \wedge \rho_v\|\,du\,dv =$ e si dimostra che non dipende da ρ né da $\mathbb{D}$

$$= \iint_{\mathbb{D}} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\,du\,dv$$

Nel caso di superfici di rotazione regolari, vale il Teorema di Pappo-Guldino



Ricordiamo che per le sup. di rotazione, $\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} = \sqrt{x(u)^2\left(x'(u)^2 + z'(u)^2\right)}$ (se $\Gamma \in zx$), dunque

$$\iint_{[a,b]\times[0,2\pi]} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\,du\,dv = \iint_{[a,b]\times[0,2\pi]} \sqrt{x(u)^2\left(x'(u)^2 + z'(u)^2\right)}\,du\,dv = 2\pi \int_a^b x(u)\,\|\rho'(u)\|\,du = \ell(\Gamma)\cdot 2\pi \cdot \frac{\int_\Gamma x\,ds}{\ell(\Gamma)}$$

(non compare v; moltiplico e divido $\ell(\Gamma)$)

Ne segue che l'area della superficie di rotazione è il prodotto tra la lunghezza della curva rotante e la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro della curva nella rotazione.

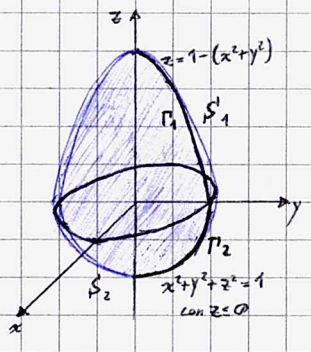
riccardo.poldoro.org

In generale, se la curva ruota intorno all'asse z, $\text{area}(S) = 2\pi \int_\Gamma x\,ds$

$[x]$ $[z]$

Per una superficie generalmente regolare, l'area è per definizione la somma delle aree delle sue porzioni di regolarità.

Esempio



$\text{area}(S) = \text{area}(S_1) + \text{area}(S_2)$

$\text{area}(S_1)$:

$$\Gamma: \begin{cases} y = u \\ z = 1-u^2 \end{cases} \quad u \in [0,1]$$

$$\text{area}(S_1) = 2\pi \int_{\Gamma_1} y\,ds = 2\pi \int_0^1 u\sqrt{1+4u^2}\,du = \frac{\pi}{4}\int 8u\sqrt{1+4u^2}\,du = \dots$$

($8u$: g', $\sqrt{1+4u^2}$: g)

$\text{area}(S_2)$:

$$\Gamma: \begin{cases} y = \cos u \\ z = \operatorname{sen} u \end{cases} \quad u \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, 0\right] \implies \text{area}(S_2) = 2\pi \int_{\Gamma_2} y\,ds = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos u\,du = 2\pi$$

Esercizi sulle SERIE non in scritto!

1. Trovare il punto iniziale (x_0 tale che $\Sigma = 0$)
2. Trovare il raggio di convergenza ρ
3. Se $\rho \in \mathbb{R}^+$, verificare cosa accade negli estremi dello intervallo di convergenza.
4. Determinare dove converge la serie.

- $\sum_n \frac{n!}{(n+1)}(x+3)^n$

  - $x_0 = -3$
  - $\rho = \frac{1}{\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = 0$

    ↳ T. di d'Alembert; $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{(n+1)!}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n!} = +\infty$

    La serie converge solo per $x=-3$ poiché $\rho = 0$

- $\sum_n \frac{n}{n+1}(x+3)^n$

  - $x_0 = -3$
  - $\rho = \frac{1}{\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = 1$ infatti $\lim_n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^1 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^1 = 1$

    dunque la serie converge assolutamente in $]-4,-2[$, uniformemente $\forall [a,b] \subseteq]-4,-2[$; non converge in $]-\infty,-4] \cup [-2,+\infty[$

  - Analizzo gli estremi dell'intervallo di convergenza:

    $x=-4 \implies (-1)^n \frac{n}{n+1}$ ($\frac{n}{n+1}$: non infinitesima) $\implies$ la serie non converge

    $x=-2 \implies \frac{n}{n+1} \implies$ la serie diverge positivamente

- $\sum_n \frac{n^2+n^3}{\operatorname{sen}^n x}$ $\qquad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Poniamo $\frac{1}{\operatorname{sen} x} = y$ e studiamo $\sum_n (n^2+n^3)y^n$, serie di POTENZE che ha $\rho = 1 \implies$ converge assolutamente in $]-1,1[$ e uniformemente in ogni $[a,b] \subseteq]-1,1[$; certamente non converge in $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$: la successione generatrice non è infinitesima.

Ne segue che $\sum_n \frac{n^2+n^3}{\operatorname{sen}^n x}$ converge $\forall x \neq k\pi$: $-1 < \frac{1}{\operatorname{sen} x} < 1$ MA le due disuguaglianze non sono mai verificate contemporaneamente $\implies$ la serie non converge in alcun punto.

riccardo.polidoro.org

- $\sum_n \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{x-1}\right)^n \qquad x \neq 1$

Poniamo $\frac{1}{x-1} = y$ e studiamo $\sum_n \frac{1}{2^n} y^n$, serie di potenze di punto iniziale 0.

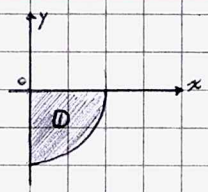
Struttiamo il T. di Cauchy-Hadamard: $\lim_n \sqrt[n]{1/2^n} = 1/2 \Rightarrow \rho = 2$; la serie converge assolutamente in $]-2,2[$ e uniformemente $\forall [a,b] \subseteq]-2,2[$.

- Se $y=2$, $\sum_n 1$ diverge positivamente $\Rightarrow$ la serie non converge in $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$
  $y=-2$, $\sum_n (-1)^n$ non regolare

La serie di partenza converge $\forall x \neq 1$: $-2 < \frac{1}{x-1} < 2$

Esercizi sulle Superfici

- S è la porzione di superficie di equazione $z = 1+xy$ che si proietta nel settore circolare $\mathbb{D}$

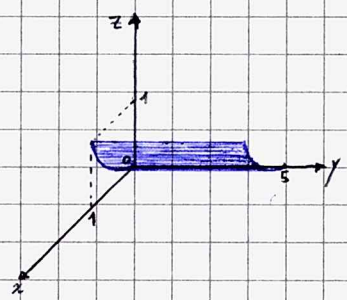


$$S: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1+uv \end{cases} \quad (u,v) \in \mathbb{D} \qquad J: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ v & u \end{pmatrix} \begin{matrix} J_1 = -v \\ J_2 = -u \\ J_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\text{area}(S) = \iint_{\mathbb{D}} \sqrt{v^2+u^2+1}\, du\, dv = \iint_{[0,1]\times[-\frac{\pi}{2},0]} \sqrt{\rho^2+1} \cdot \rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\vartheta \int_0^1 \rho\sqrt{\rho^2+1}\, d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\left[\sqrt{(\rho^2+1)^3}\right]_0^1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{(\rho^2+1)^3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)$$

- S è la superficie cilindrica di curva direttrice $z = x^2$, con $x \in [0,1]$ e $z \in [0,1]$, e con rette generatrici parallele all'asse y, limitata dai piani di equazione $y = 0$ e $y = 5$.



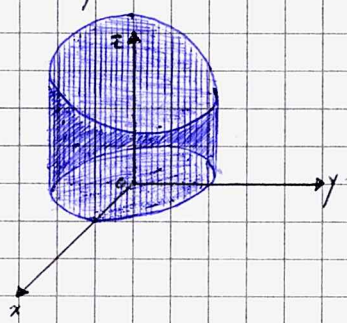
$$\Gamma: \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = u^2 \end{cases} \quad u \in [0,1] \Rightarrow \text{le rette generatrici hanno equazioni } \underline{r} = \underline{\rho}(u) + v\,\underline{j}$$

$$\Rightarrow \underline{\rho}(u) = (u^2, 0, u^2)$$

Ne segue che $S: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 \end{cases}$, $(u,v) \in [0,1]\times[0,5]$ $\qquad J: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} J_1 = -2u \\ J_2 = 0 \\ J_3 = 1 \end{matrix}$ rette $\parallel y \Rightarrow \underset{\text{vers. normale}}{n_2} = 0$

$$\text{area}(S) = \iint_{[0,1]\times[0,5]} \sqrt{1+4u^2}\, du\, dv = 5\int_0^2 \sqrt{1+4u^2}\, du = \underbrace{5 \cdot \ell(\Gamma)}_{\text{replica l'arco di parabola nella lunghezza dell'intervallo } [0,5]}$$

- $x^2+y^2 = 4$ limitata da $z = 0$ e $z = 5-x-y$



$$S = \begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 2\operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}, \quad (u,v) \in \mathbb{D} = \{(u,v) : u \in [0,2\pi] \text{ e } 0 \leq v \leq 5 - \underbrace{2\cos u}_{x} - \underbrace{2\operatorname{sen} u}_{y}\}$$

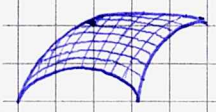
$$J: \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} u & 0 \\ 2\cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} J_1 = 2\cos u \\ J_2 = 2\operatorname{sen} u \\ J_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\text{area}(S) = \iint_{\mathbb{D}} \sqrt{4\cos^2 u + 4\operatorname{sen}^2 u}\, du\, dv = 2\iint_{\mathbb{D}} du\, dv = 2\int_0^{2\pi} dv \int_0^1 5 - 2\cos u - 2\operatorname{sen} u\, du = 20\pi$$

riccardo.polidoro.org

Integrale Superficiale

Sia S una superficie regolare.



Consideriamo una reticolazione di S $\mathcal{R} = \{S_1, \dots, S_n\}$ di superfici regolari in maniera tale che $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = S$.

Sia $f: S \to \mathbb{R}$ continua su S; $\forall i = 1, \dots, n$ esiste $\min_{S_i} f$ e $\max_{S_i} f$; definiamo dunque:

$$s'_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} \min_{S_i} f \cdot \text{area}(S_i)$$

$$s''_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} \max_{S_i} f \cdot \text{area}(S_i)$$

Si dimostra che, al variare di $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}' = \{s'_{\mathcal{R}}, \mathcal{R}\}$ e $\mathcal{S}'' = \{s''_{\mathcal{R}}, \mathcal{R}\}$ sono separati e contigui.

Risulta che $\sup \mathcal{S}' = \inf \mathcal{S}'' \overset{\text{def}}{=}$ **integrale superficiale di f esteso ad S**, denotato con $\int_S f \, d\sigma$ (↳ quantità infinitesima di area)

Logicamente, valgono tutte le proprietà degli integrali; la finita additività vale solo per superfici REGOLARI.

Se S è una superficie generalmente regolare con porzioni di regolarità $S_1, \dots, S_n$, ovvero se $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, allora:

$$\int_S f \, d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} f \, d\sigma$$

Se φ è una rappresentazione parametrica <u>regolare</u> di S di base un dominio <u>regolare</u> $\mathbb{D}$, allora: (calcolo ↓)

$$\int_S f \, d\sigma = \iint_{\mathbb{D}} f(\varphi(u,v)) \cdot \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du\,dv = \iint_{\mathbb{D}} f(\varphi(u,v)) \cdot \sqrt{J_1^2(u,v) + J_2^2(u,v) + J_3^2(u,v)} \, du\,dv$$

Analogamente a quanto detto per le curve, il baricentro di una superficie è il punto di coordinate:

$$x_B = \frac{\int_S x \, d\sigma}{\text{area}(S)} \quad ; \quad y_B = \frac{\int_S y \, d\sigma}{\text{area}(S)} \quad ; \quad z_B = \frac{\int_S z \, d\sigma}{\text{area}(S)}$$

E se $f = 1$, $\int_S d\sigma = \text{area}(S)$.

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie ORIENTATA

Se S è una superficie regolare **orientata** (ovvero se è fissato il verso di $\underline{n}$), il flusso attraverso S di un campo vettoriale $\underline{w}(x,y,z) = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$, continuo su S, è per definizione l'integrale superficiale del prodotto scalare $\underline{w}_\varphi \cdot \underline{n}_\varphi$, funzione scalare continua su S in quanto anche $\underline{n}_\varphi$ è – per definizione – un campo continuo.

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \int_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

Se φ è una rappresentazione parametrica regolare di S di base un dominio regolare $\mathbb{D}$, allora poiché $f = w(\varphi(u,v)) \cdot \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\pm\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$: (↳ a seconda che φ sia concorde o meno con l'orientamento...)

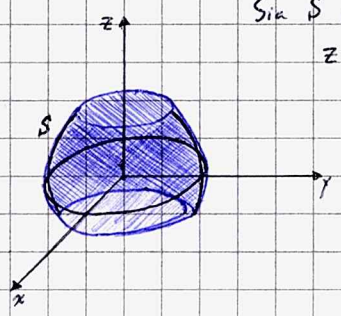
$$\Phi = \pm \iint_{\mathbb{D}} X(\varphi(u,v)) \cdot J_1(u,v) + Y(\varphi(u,v)) \cdot J_2(u,v) + Z(\varphi(u,v)) \cdot J_3(u,v) \, du\,dv$$

Con segno + [−] se φ è concorde [discorde] con l'orientamento

Se $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ è una superficie generalmente regolare con n porzioni di regolarità, $\Phi_S = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{S_i}$ (↳ si esplicita perché è generalmente regolare)

[fine per ingegneri]

riccardo.polidoro.org



Sia S la porzione di superficie sferica di centro l'origine e raggio 1 limitata dai piani di equazione $z=-1/2$ e $z=\sqrt{3}/2$. Calcolare la quota del baricentro.

Consideriamo S come una superficie di rotazione ottenuta a partire dalla curva Γ:

$$\Gamma:\begin{cases} x=0 \\ y=\cos u \\ z=\operatorname{sen} u \end{cases}, \quad u\in\left[-\pi/6,\ \pi/3\right]$$

Ne segue che una rappresentazione di S è

$$S:\begin{cases} x=\cos u\cos v \\ y=\cos u\operatorname{sen} v \\ z=\operatorname{sen} u \end{cases} \qquad (u,v)\in \underbrace{\left[-\pi/6,\pi/3\right]\times[0,2\pi]}_{\mathbb{D}}$$

$$\text{area}(S) = \overbrace{2\pi\int_\Gamma y\,ds}^{\text{T. Pappo-Guldino}} = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi/3}\cos u\cdot\overbrace{1}^{\sqrt{\operatorname{sen}^2 u+\cos^2 u}}\,du = 2\pi\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12\right) = \pi(\sqrt3+1)$$

$$z_B = \frac{1}{\pi(\sqrt3+1)}\int_S z\,d\sigma = \frac{1}{\pi(\sqrt3+1)}\int_{\mathbb{D}}\operatorname{sen} u\sqrt{\cos^4 u+\cos^2 u\operatorname{sen}^2 u}\,du\,dv =$$

$$J=\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} u\cos v & -\cos u\operatorname{sen} v \\ -\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v & \cos u\cos v \\ \cos u & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} J_1=-\cos^2 u\cos v \\ J_2=-\cos^2 u\operatorname{sen} v \\ J_3=-\operatorname{sen} u\cos u \end{matrix}$$

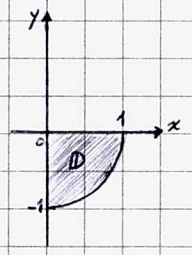
$\sqrt{\cos^4 u+\cos^2 u\operatorname{sen}^2 u} = \cos^2 u$

$$= \frac{1}{\pi(\sqrt3+1)}\iint_{\mathbb{D}}\operatorname{sen} u\,|\cos u|\,du\,dv = \frac{2}{\sqrt3+1}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{sen} u\cos u\,du\,dv = \frac{2}{\sqrt3+1}\left[\frac{\operatorname{sen}^2 u}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

($|\cos u|$: in questo caso $y>0 \Rightarrow \cos u\geq 0$)

$$= \frac{1}{2\sqrt3+2}$$

- Sia S la superficie definita dall'equazione $z=1+xy$, con (x,y) appartenente al seguente dominio $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}^2$. Si orienti S tale che $n_3<0$ e si calcoli il flusso attraverso S del campo vettoriale $\underline{w}(x,y,z)=zy\,\underline{i}-xy\,\underline{k}$.



Conviene parametrizzare S come grafico di una funzione scalare in due variabili:

$$S:\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=1+uv \end{cases}, \ (u,v)\in\mathbb{D} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} J_1=-v \\ J_2=-u \\ J_3=1 \end{matrix}$$

quindi la rappresentazione è DISCORDE con l'orientamento

$$\Phi = -\iint_{\mathbb{D}} v(1+uv)(-v)-uv(1)\,du\,dv = +\iint_{\mathbb{D}} +v^2+uv^3+uv\,du\,dv =$$

poniamo $u=\rho\cos\vartheta$, $v=\rho\operatorname{sen}\vartheta$, $(\rho,\vartheta)\in[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

$$= \iint_{[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},0\right]} \rho^3\operatorname{sen}^2\vartheta+\rho^5\cos\vartheta\operatorname{sen}^3\vartheta+\rho^3\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\vartheta\int_0^1 \rho^3\left(\operatorname{sen}^2\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\right)+\rho^5\left(\cos\vartheta\operatorname{sen}^3\vartheta\right)d\rho =$$

$$= \frac14\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\operatorname{sen}^2\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta+\frac16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\vartheta\operatorname{sen}^3\vartheta\,d\vartheta = \frac14\left[\frac{\vartheta}{2}-\frac{\operatorname{sen}2\vartheta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\frac18\left[\operatorname{sen}^2\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\frac16\left[\frac{\operatorname{sen}^4\vartheta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{3^n|\log x|^n}{\log(n+1)}$ definita per $x\in\,]0,+\infty[$, è una serie riconducibile a serie di potenze.

Poniamo $|\log x|=y$ e studiamo la serie $\sum_n \frac{3^n}{\log(n+1)}y^n$, di punto iniziale 0.

Per calcolare il raggio di convergenza applichiamo il teorema di d'Alembert:

$$\lim_n \frac{3^{n+1}}{\log(n+2)}\cdot\frac{\log(n+1)}{3^n} = \lim_n 3\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}\right) = 3 \Rightarrow \rho=\frac13$$

La serie dunque converge per $y=|\log x|<1/3$, dunque se $-1/3<\log x<1/3 \iff e^{-1/3}<x<e^{1/3}$; la serie quindi converge assolutamente in $]e^{-1/3},e^{1/3}[$ e uniformemente in ogni compatto $[e^{-1/3},a]$ con $a<e^{1/3}$ poiché per $y=-1/3$ la serie converge per il criterio di Leibnitz.

riccardo.polidoro.org

Teorema della Divergenza (in $\mathbb{R}^3$)

⚠ Vale solo in superfici CHIUSE

Sia $\underline{w}$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$, con A aperto di $\mathbb{R}^3$.
Allora, qualunque sia la superficie chiusa regolare [generalmente regolare] S, detto T il dominio limitato di cui S è frontiera si ha che:

S ↓ CONTENUTA IN A

$$\iiint_T \operatorname{div} \underline{w}\, dx\,dy\,dz = \int_S \underline{w}\cdot\underline{n_e}\, d\sigma$$

flusso USCENTE dalla superficie S, ovvero con il versore normale esterno.

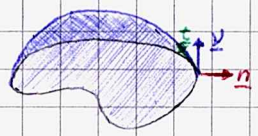
Teorema di Stokes (in $\mathbb{R}^3$)

Sia $\underline{w}$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$, con A aperto di $\mathbb{R}^3$.
Allora, qualunque sia la superficie con bordo, regolare o generalmente regolare, orientata e contenuta in A si ha che:

$$\int_S \operatorname{rot}\underline{w}\cdot\underline{n}\, d\sigma = \int_{B(S)^+} \underline{w}\cdot d\underline{p}$$

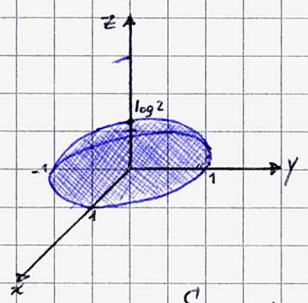
flusso del rotore

circuitazione di $\underline{w}$ lungo il bordo di S, orientato concordemente con la superficie



Esercizi

- Sia $S = S_1 \cup S_2$ la superficie generalmente regolare data dall'unione di $S_1: z = \log(2+x^2-y^2)$ con $z \geq 0$ ($\Rightarrow (x,y) \in C_{0,1}$) e $S_2 \equiv C_{0,1}$. Calcolare il flusso uscente da S del campo vettoriale $\underline{w}(x,y,z) = xy\,\underline{i} - xy\,\underline{j} + z\,\underline{k}$ senza sfruttare il teorema della divergenza.



Essendo S generalmente regolare, $\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2}$

$$S_1: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \log(2-u^2-v^2) \end{cases} ; (u,v) \in C_{0,1} \Rightarrow \quad J_1 = \frac{2u}{2-(u^2+v^2)} \quad ; \quad J_2 = \frac{2v}{2-(u^2+v^2)} \quad ; \quad J_3 = 1 \Rightarrow \text{la rappresentazione è concorde con l'orientamento}$$

S_2 può essere parametrizzata in almeno due modi efficaci:

$$S_2: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}, (u,v) \in C_{0,1} \qquad \begin{matrix} J_1 = 0 \\ J_2 = 0 \\ J_3 = 1 \end{matrix} \quad \text{rappresentazione discorde}$$

scegliamo questa rapp. nel calcolo.

$$; \quad S_2: \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\operatorname{sen}\vartheta \\ z = 0 \end{cases}, (\rho,\vartheta) \in [0,1]\times[0,2\pi] \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \rho\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \rho\cos\vartheta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow J_1 = J_2 = 0$, $J_3 = \rho > 0 \Rightarrow$ rapp. discorde

$$\Phi_{S_1} = \iint_{C_{0,1}} \frac{2u^2v}{2-(u^2+v^2)} - \frac{2uv^2}{2-(u^2+v^2)} + \log(2-(u^2+v^2))\cdot 1 \, du\,dv = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{2\rho^4\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{2-\rho^2} - \frac{2\rho^4\operatorname{sen}^2\vartheta\cos\vartheta}{2-\rho^2} + \rho\log(2-\rho^2)\,d\rho\,d\vartheta =$$

(diventa 0 + trig^3 in $[0,2\pi]$)

$$= 2\pi\int_0^1 \rho\log(2-\rho^2)\,d\rho\,d\vartheta = \dots \quad ; \quad \Phi_{S_2} = 0$$ poiché o sono nulle le componenti calcolate sulla rappresentazione parametrica o le componenti di $\underline{n}$

Serie riducibili a Serie di Potenze

- $\sum_n \frac{(\sqrt{x}+2)^n}{n2^n}$ $\quad X: x \in [0,+\infty[$

Poniamo $\sqrt{x}+2 = y$ e studiamo $\sum_n \frac{y^n}{n2^n}$, serie di potenze di punto iniziale 0

Applicando il T. di Cauchy-Hadamard, otteniamo $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = 2$

Valutiamo cosa accade negli estremi di I_ρ: • $y = -2 \Rightarrow \sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge per Leibnitz
• $y = 2 \Rightarrow \sum_n 1/n$ diverge positivamente.

riccardo.polidoro.org

Ne segue che $I_p = [-2, 2[$, in cui la serie converge assolutamente,

converge uniformemente $\forall\, [a,b] \subseteq I_p$

" " $\forall [-2, a]$, $a < 2$

Ciò implica che $-2 \le \sqrt{x} + 2 \le 2 \Rightarrow -4 \le x < 0 \Rightarrow$ La serie di partenza NON CONVERGE in alcun punto.

- $\sum_n \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \left(x^2-4\right)^n$

Poniamo $y = x^2 - 4$ e studiamo la serie $\sum_n \left(1+\frac{2}{n}\right)^n y^n$; applichiamo Cauchy-Hadamard: $\lim_n \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = 1$

- Se $y = -1$, $\sum_n (-1)^n \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ non converge: la serie dei valori assoluti è crescente! (non infinitesima: tende a e^2)
- Se $y = 1$, $\sum_n \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ diverge positivamente.

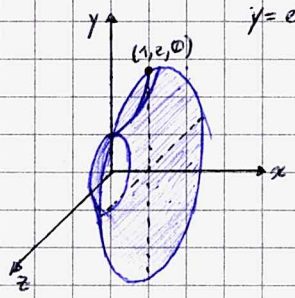
Dunque $I_p =]-1, 1[$, la serie converge assolutamente; uniformemente $\forall\, [a,b] \subseteq I_p$

Ne segue che $-1 < x^2 - 4 < 1 \Rightarrow 3 < x^2 < 5 \Rightarrow x \in]-\sqrt{5}, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, \sqrt{5}[$

conv. ass. nell'insieme
unif. in ogni compatto $\subseteq I$
non converge all'esterno

Superfici

$y = e^x$, $x \in [0, 1]$, S_1 ottenuta dalla rotazione attorno all'asse x.



Trovare l'equazione del piano tangente ad S_1 nel punto $(1, e, 0)$, punto di regolarità del bordo.

1. Eqnaz. parametriche di Γ: $\begin{cases} x = u \\ y = e^u \\ z = 0 \end{cases}$, $u \in [0,1] \Rightarrow S_1: \begin{cases} x = u \\ y = e^u \cos v \\ z = e^u \operatorname{sen} v \end{cases}$, $(u,v) \in [0,1] \times [0, 2\pi]$

y sono le ascisse del piano yz, l'asse polare è per convenzione quello delle ascisse!

Per determinare l'equazione del piano tangente consideriamo la matrice Jacobiana:

$$J: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^u \cos v & -e^u \operatorname{sen} v \\ e^u \operatorname{sen} v & e^u \cos v \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} J_1(u,v) &= e^{2u} \\ J_2(u,v) &= -e^u \cos v \\ J_3(u,v) &= e^u \operatorname{sen} v \end{aligned}$$

I J_i sono parametri di giacitura del piano tangente.

Per ottenere i parametri di giacitura del piano cercato occorre comprendere a quali parametri corrisponde il punto $(1, e, 0)$:

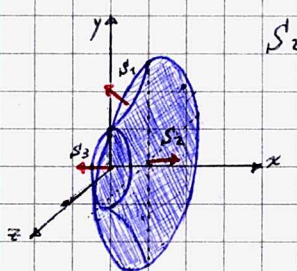
$$\begin{cases} 1 = u \\ e = e^u \cos v \\ 0 = e^u \operatorname{sen} v \end{cases} \Rightarrow (u,v) = (1, 0) \Longrightarrow J_1(1,0) = e^2;\ J_2(1,0) = -e^2;\ J_3(1,0) = 0$$

ottenibile anche con ragionamenti GEOMETRICI!

Dunque; $\pi: e^2(x-1) - e(y-e) = 0 \Rightarrow e^2 x - ey = 0$

Definiamo ora $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, con S_2 ed S_3 cerchi delimitati dalle circonferenze di $B(S_1)$, e calcoliamo il flusso uscente da S del campo vettoriale $\underline{w}(x,y,z) = y\,\underline{i} - xz\,\underline{k}$:

Sfruttiamo la rappresentazione di S_1 calcolata in precedenza, discorde con l'orientamento ($J_1(1,0) = e^2 > 0$)



$$S_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = u \\ z = v \end{cases} (u,v) \in C_{0,e} \qquad \begin{aligned} J_1 &= 1 \\ J_2 &= J_3 = 0 \end{aligned}$$

concorde

perché diagramma di una f costante rispetto al piano yz

$$S_3: \begin{cases} x = 0 \\ y = u \\ z = v \end{cases}, (u,v) \in C_{0,1} \qquad J_1 = 1,\ J_2 = J_3 = 0$$

discorde

In queste due superfici dunque conta solo la prima componente del campo, poiché solo $J_1 \neq 0$.

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3} = -\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \overbrace{e^u \cos v}^{0} \cdot e^{2u} - u e^u \operatorname{sen} v \left(-e^u \operatorname{sen} v\right) du\,dv + \iint_{C_{0,e}} u\,du\,dv - \iint_{C_{0,1}} u\,du\,dv$$

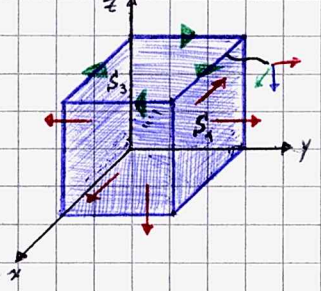
$\int \frac{u}{2} \cdot e^{2u}$

$\to 0$

si trasforma in coordinate polari; applicando la linearità si può integrare sulla corona circolare. I domini sono simmetrici rispetto all'asse u, la f è dispari

$\Rightarrow 0$

riccardo.polidoro.org



Esercizio sul Teorema di Stokes: Consideriamo un cubo privo di una faccia; verificare il teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$, con $\underline{w}(x,y,z) = y\underline{i} + xz\underline{k}$

$$S = \bigcup_{i=1}^{5} S_i \; ; \quad S_1 = \begin{cases} x = v \\ y = 1 \\ z = u \end{cases}, (u,v) \in [0,1]^2 \; ; \quad S_2 : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}, (u,v) \in [0,1]\times[0,1]$$

$J_1 = J_3 = 0$; $J_2 = 1$ concorde

$J_1 = J_2 = 0$; $J_3 = 1$ discorde

$$S_3 : \begin{cases} x = v \\ y = 0 \\ z = u \end{cases} \quad (u,v) \in [0,1]\times[0,1]$$

$J_1 = J_3 = 0$, $J_2 = 1$ discorde $\langle \dots \rangle$ $\quad \operatorname{rot}\underline{w} = -z\underline{j} - \underline{k}$

T. Stokes in $\mathbb{R}^3$:

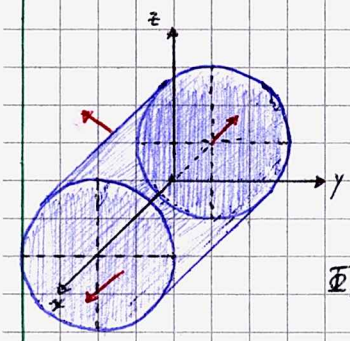
$$\int_S \operatorname{rot}\underline{w} \cdot \underline{n}\, d\sigma = \int_{B(S)^+} \underline{w} \cdot d\underline{\rho}$$

$$\Phi_{S_1} = -\iint_{[0,1]\times[0,1]} u\, du\, dv = -\frac{1}{2} \; ; \quad \Phi_{S_2} = \iint_{[0,1]^2} 1\, du\, dv = 1 \quad \Phi_{S_3} = \iint_{[0,1]^2} u\, du\, dv = \frac{1}{2} \quad \langle \dots \rangle = 1$$

Circuitazione lungo $B(S) = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} t \in [0,1] \text{ concorde con l'or. positivo di } B(S) \; ; \quad \Gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} t \in [0,1] \text{ discorde} \; ; \quad \Gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} t \in [0,1] \text{ discorde} \; ; \quad \Gamma_4 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} t \in [0,1] \text{ concorde}$$

$$\int_{B(S)^+} \underline{w} \cdot d\underline{\rho} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i} \underline{w} \cdot d\underline{\rho} = \int_0^1 1\, dt - \int_0^1 0\, dt - \int_0^1 0\, dt + \int_0^1 0\, dt = 1 \quad \blacksquare$$



Sia T il cilindro con $\partial T = S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. {Calcolare il flusso uscente di $\underline{w} = x\underline{i} + e^z\underline{j} + zy\underline{k}$}

$S_1 : y^2 + z^2 = 1$, $x = 3$ limitata, $x = -1$ $\quad S_2, S_3$ cerchi che delimitano

Verifichiamo il Teorema della divergenza:

$$\Phi_S = \iiint_T \operatorname{div}\underline{w}\, d\sigma = \iiint 1 + 0 + y\, dx\,dy\,dz$$

$$S_1 : \begin{cases} x = v \\ y = \cos u \\ z = \operatorname{sen} u \end{cases}, (u,v) \in [0,2\pi]\times[-1,3] \quad J : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\operatorname{sen} u & 0 \\ \cos u & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} J_1 = 0 \\ J_2 = \cos u \\ J_3 = \operatorname{sen} u \end{matrix}$$

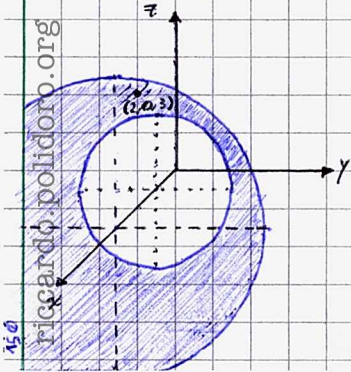
considero il punto $(3,1,0) \Rightarrow v = 3$, $u = 0 \Rightarrow J_2(0,3) = 1 \Rightarrow$ la rapp. è concorde con l'orient.

$$S_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = u \\ z = v \end{cases} (u,v) \in C_{0,1} \qquad S_3 : \begin{cases} x = 3 \\ y = u \\ z = v \end{cases} (u,v) \in C_{0,1}$$

e per entrambe $J_1 = 1 \Rightarrow S_2$ concorde; $J_2 = J_3 = 0 \Rightarrow S_3$ concorde

$$\Phi_S = \iint_{[0,2\pi]\times[-1,3]} e^{\operatorname{sen} u} \cos u + \operatorname{sen}^2 u \cos u\, du\,dv + \iint_{C_{0,1}} du\,dv + 3\iint_{C_{0,1}} du\,dv = 4\pi$$

- Sia S la superficie ottenuta dalla rotazione attorno all'asse x del segmento $x = z - 1$, con $z \in [2,4]$. Determinare l'equazione del piano tangente a S nel punto $(2,0,3)$.

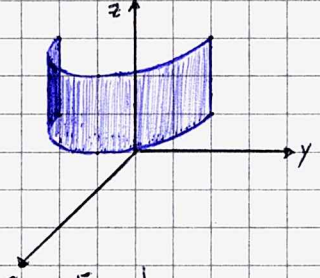


$$\Gamma : \begin{cases} x = u - 1 \\ y = 0 \\ z = u \end{cases}, u \in [2,4] \overset{\text{r.s.}}{\Rightarrow} \begin{cases} x = u - 1 \\ y = u\cos v \\ z = u \operatorname{sen} v \end{cases}, (u,v) \in [2,4]\times[0,2\pi]$$

$$\rho_0 : \begin{cases} u - 1 = 2 \\ u\cos v = 0 \\ u \operatorname{sen} v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \\ \cos v = 0 \\ \operatorname{sen} v = 1 \end{cases} \Rightarrow (u_0, v_0) = (3, \pi/2). \quad J : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos v & -u\operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} v & u\cos v \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} J_1 = u \\ J_2 = -u\cos v \\ J_3 = -u\operatorname{sen} v \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} J_1(\rho_0) = 3 \\ J_2(\rho_0) = 0 \\ J_3(\rho_0) = -3 \end{matrix}$$

Dunque, π: $3(x-2) + 3(z-3) = 0 \Rightarrow 3(x - z + 1) = 0 \Rightarrow x - z + 1 = 0$

ricardo.polidoro.org



Sia S la superficie cilindrica di curva direttrice la semicirconferenza Γ del piano xy con $x \geq 0$ e rette generatrici parallele all'asse z delimitata dai piani $z=1$ e $z=3$ orientata tale che $n_1 > 0$.

Calcolare il flusso del campo $\underline{w} = x^2 \underline{j} - y\underline{k}$ oppure le coordinate del baricentro del solido T avente come frontiera S, la porzione di piano $y=0$ delimitata dalla proiezione di S sul piano yz e le due semicirconferenze che chiudono la superficie.

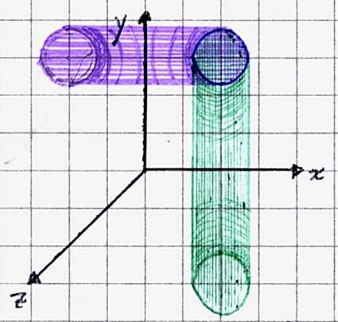
↑ traccia esame

Essendo una traccia d'esame, risolveremo solo la condizione 1.

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 2\operatorname{sen} u \\ z = 0 \end{cases}, \; u \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow S: \begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 2\operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}, (u,v) \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \times [1,3]; \; J: \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} u & 0 \\ 2\cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} J_1 = 2\cos u \\ J_2 = 2\operatorname{sen} u \\ J_3 = 0 \end{matrix}$$

concorde $\left(u \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]\right)$

$$\underline{\Phi} = \iint_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [1,3]} 8\cos^2 u \operatorname{sen} u - 0 \, du\,dv = -\frac{8}{3}\left[\cos^3 u\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot 3 = 0$$



Sia S la superficie torica generata dalla rotazione della circonferenza di centro il punto $(3,2)$ e raggio 1. Determinare le equazioni parametriche di S a seconda dell'asse di rotazione scelto (asse x o asse y).

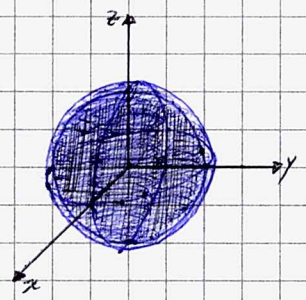
$$\Gamma: \begin{cases} x = 3 + \cos u \\ y = 2 \cancel{\cos u + \operatorname{sen} u \cos u} \; 2 + \operatorname{sen} u \\ z = 0 \end{cases}, \; u \in [0, 2\pi]$$

$$S_{\substack{\downarrow \\ \text{rot. } x}} = \begin{cases} x = 3 + \cos u \\ y = 2\cos v + \operatorname{sen} u \cos v \\ z = 2 \operatorname{sen} v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \end{cases}, (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]; \; J: \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} u & 0 \\ \cos u \cos v & (2 + \operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v \\ \cos u \cos v & (2 + \operatorname{sen} u)\cos v \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= (2+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ J_2 &= (2+\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} u \cos v \\ J_3 &= (2+\operatorname{sen} u)\cos u \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{essendo } (2+\operatorname{sen} u) > 0 \; \forall u, \; \|\underline{\rho}_u \wedge \underline{\rho}_v\| = \underbrace{(2+\operatorname{sen} u)}_{\text{senza v. ass}} \sqrt{\operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}$$

$$S_y: \begin{cases} x = (3+\cos u)\operatorname{sen} v \\ y = 2 + \operatorname{sen} u \\ z = (3+\cos u)\cos v \end{cases}, (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$$

- Sia S la superficie sferica di centro l'origine di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{4}$, e $\underline{w}$ il campo vettoriale di equazione $\underline{w} = x(y+z)\underline{j} + x\underline{k}$.
Verificare l'asserto del Teorema della divergenza, ovvero che $\Phi_S = \iiint_T \operatorname{div} \underline{w} \, dx\,dy\,dz = \int_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \iiint_T x \, dx\,dy\,dz$



$\iiint_T x \, dx\,dy\,dz$ è l'integrale di una funzione dispari in un dominio simmetrico rispetto al piano yz, ed è dunque uguale a 0.

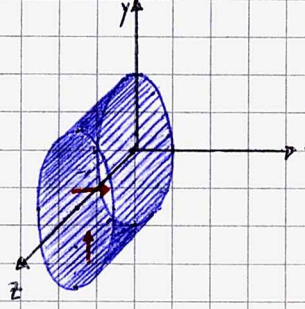
$$S: \begin{cases} x = \sqrt{2}\operatorname{sen} u \cos v \\ y = \sqrt{2}\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = \sqrt{2}\cos u \end{cases}, (u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi] \quad J: \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos u \cos v & -\sqrt{2}\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \sqrt{2}\cos u \operatorname{sen} v & \sqrt{2}\operatorname{sen} u \cos v \\ -\sqrt{2}\operatorname{sen} u & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = 2\operatorname{sen}^2 u \cos v; \; J_2 = 2\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v; \; J_3 = 2\operatorname{sen} u \cos u$$

$$\underline{\Phi} = \iint_{[0,\pi] \times [0,2\pi]} (\sqrt{2}^2 \operatorname{sen} u \cos v)(\sqrt{2}\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v + \sqrt{2}\cos u)(2\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v) + \sqrt{2}\operatorname{sen} u \cos v (2\operatorname{sen} u \cos u) \, du\,dv =$$

$$= \iint_{[0,\pi] \times [0,2\pi]} (2\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v \underbrace{\cos v}_{0} + 2\operatorname{sen} u \cos u \underbrace{\cos v}_{0})(2\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v) + 2\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 u (\cos u \underbrace{\cos v}_{0}) \, du\,dv = 0 \; \blacksquare$$

riccardo.polidoro.org



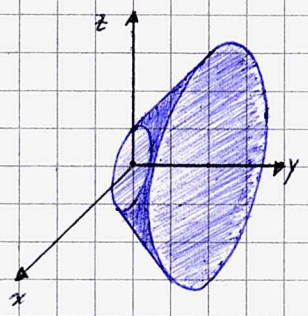
Sia S la superficie cilindrica di curva direttrice l'ellisse di equazione $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ e generatrici parallele all'asse z, limitata dai piani di equazione $z=0$ e $z=3$, orientata verso l'interno. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{w}(x,y,z)=(y+z)\underline{i}-y\underline{k}$.

$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos u\\ y=2\operatorname{sen} u\\ z=0\end{cases},\ u\in[0,2\pi] \Rightarrow S:\begin{cases}x=\cos u\\ y=2\operatorname{sen} u\\ z=v\end{cases},\ (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,3]$$

$$J:\begin{pmatrix}-\operatorname{sen} u & 0\\ 2\cos u & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad J_1=2\cos u\quad J_2=\operatorname{sen} u\quad J_3=0$$

fissando il punto $(0,2,0)=p(\frac{\pi}{2},0)\Rightarrow J_2=1$, otteniamo che la rappresentazione è discorde con l'orientamento fissato sulla superficie.

$$\Phi=\iint_{[0,2\pi]\times[0,3]} 2\operatorname{sen}^2 u+v\overbrace{\operatorname{sen} u}^{0}\,du\,dv=-6\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 u\,du=-6\pi$$



Sia S la superficie tronco-conica di equazione $y=\sqrt{x^2+z^2-1}$, con $y\in[0,2]$.
Orientare S tale che $n_2>0$ e calcolare Φ del campo $\underline{w}(x,y,z)=x^2\underline{i}+y^2\underline{k}$.

$$S:\begin{cases}x=v\\ y=\sqrt{u^2+v^2}-1\\ z=u\end{cases}\quad (u,v)\in G_{0,[1,3]}$$

poiché la radice non si annulla, $p\in G^{-1}(I)$

e $J_1=-\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $J_2=1$, $J_3=-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$

la rappresentazione è concorde con l'orientamento.

$$\Phi=\iint_{G_{0,[1,3]}} -\frac{v^3}{\sqrt{u^2+v^2}}-\frac{(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot u\,du\,dv=\ldots=0$$

dalla trasformazione in coordinate polari risulta un integrale con $\operatorname{sen}^3\vartheta$ e $\cos\vartheta$.

- Sia $\mathbb{D}$ il quadrato $[1,2]\times[0,1]$ del piano xy e S la superficie di equazione $z=\sqrt{x+y}$, con $(x,y)\in\mathbb{D}$.
Orientiamo S tale che $n_3<0$ e calcoliamo il flusso del campo vettoriale $\underline{w}(x,y,z)=(x+y)\underline{i}-z\underline{j}$.

$$S:\begin{cases}x=u\\ y=v\\ z=\sqrt{u+v}\end{cases},\ (u,v)\in\mathbb{D}\qquad J_1=-\frac{1}{2\sqrt{u+v}}\quad J_2=-\frac{1}{2\sqrt{u+v}}\quad J_3=1$$

$\Rightarrow$ la rappresentazione è discorde con l'orientamento.

$$\Phi=-\iint_{[1,2]\times[0,1]}-\frac{1}{2}\frac{u+v}{\sqrt{u+v}}-\sqrt{u+v}\,du\,dv=\frac{3}{2}\int_1^2 du\int_0^1\sqrt{u+v}\,dv=\int_1^2\left[\sqrt{(u+v)^3}\right]_0^1 du=\int_1^2\sqrt{(u+1)^3}-\sqrt{u^3}\,du=\frac{2}{5}\left(\left[(u+1)^{5/2}\right]_1^2-\left[u^{5/2}\right]_1^2\right)$$

Fine Analisi II

prof.ssa Maria Beatrice Lignola

01.06.2021 - 30L

riccardo.polidoro.org